

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
Fakultät Wirtschaftswissenschaften

Dresdner Beiträge zur
Betriebswirtschaftslehre

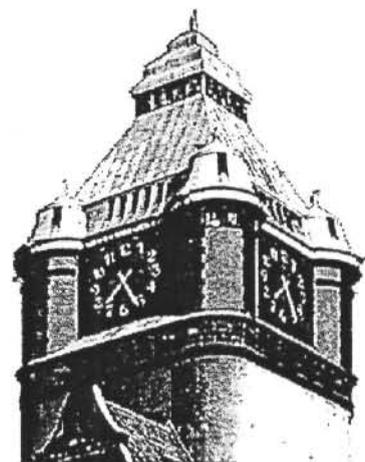
Nr. 30/99

**Simultanplanung von
Fertigungslosgröße und
Transportlosgrößen in mehrstufigen
Fertigungssystemen**

**Zwei statisch deterministische Ansätze
bei unrestringierten Kapazitäten**

Ronald Bogaschewsky
Udo Buscher
Gerd Lindner

Herausgeber:
Die Professoren der
Fachgruppe Betriebswirtschaftslehre
ISSN 0945-4810



**Simultanplanung von Fertigungslosgröße und
Transportlosgrößen in mehrstufigen
Fertigungssystemen**

—

**Zwei statisch deterministische Ansätze bei
unrestringierten Kapazitäten**

Prof. Dr. Ronald Bogaschewsky

Dr. Udo Buscher

Dipl.-Wirtsch.-Ing. Gerd Lindner

**Arbeitsbericht des Lehrstuhls für Betriebswirtschaftslehre,
insbesondere Produktionswirtschaft
Fakultät Wirtschaftswissenschaften
Technische Universität Dresden**

Mommsenstraße 13
01062 Dresden
Tel. 0351/463-3470
Fax. 0351/463-7714

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis	IV
Symbolverzeichnis	V
Abbildungsverzeichnis	VIII
Tabellenverzeichnis.....	IX
1 Problemstellung.....	1
2 Planung der Fertigungslosgröße für mehrstufige Produktionssysteme unter Berücksichtigung unterschiedlicher Transportlosgrößen.....	7
2.1 Entwicklung und Diskussion der Grundelemente des Modellansatzes	7
2.2 Optimierung bei einer identischen Transporthäufigkeit.....	12
2.3 Optimierung bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten.....	15
2.3.1 Ermittlung einer heuristischen Lösung	15
2.3.2 Ermittlung der Optimallösung	24
2.4 Veranschaulichung durch ein numerisches Beispiel.....	30
3 Schlußbetrachtung	46
Anhang.....	49
A Bestimmung der zeitgewichteten Lagerhaltung	49
B Nachweis der Konvexitätseigenschaften	55
C Herleitung von Bestimmungsgleichungen	61
D Beweis zur Bestimmung ganzzahlig optimaler stufenbezogener Transport- häufigkeiten für die vereinfachte Berechnungsvorschrift	65
Literaturverzeichnis.....	68

Abkürzungsverzeichnis

AL	Absatzlager
Aufl.	Auflage
bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
EPQ	Economic Production Quantity
et al.	et alii
f.	folgende
ff.	fortfolgende
GE	Geldeinheit
Hrsg.	Herausgeber
ME	Mengeneinheit
Nr.	Nummer
S.	Seite
Sp.	Spalte
vgl.	vergleiche
Vol.	Volume
WiSt	Wirtschaftswissenschaftliches Studium
z.B.	zum Beispiel
ZE	Zeiteinheit
ZL _s	Zwischenlager zwischen Stufe s und s+1

Symbolverzeichnis

Im vorliegenden Arbeitsbericht werden (Un-)Gleichungen grundsätzlich fortlaufend numeriert. Jeder Ziffer, die eine (Un-)Gleichung charakterisiert, wird dabei der Buchstabe G vorangestellt. In den Anhängen enthaltene (Un-)Gleichungen werden ebenfalls fortlaufend gekennzeichnet. Der vorangestellte Buchstabe benennt dann den relevanten Anhang. So stellt bspw. A-1 eine Gleichung in Anhang A dar.

Im folgenden stufenbezogen indizierte Symbole beziehen sich auf Stufe s eines Fertigungssystems mit S Stufen, $s=1(1)S$.

B	Gesamtbedarf im Planungszeitraum [ME]
$c_{L,s}$	stufenbezogener Lagerhaltungskostensatz pro Zeiteinheit [GE/(ME·ZE)]
$H_s(m_s)$	durch die stufenbezogene Transporthäufigkeit m_s beeinflussbarer Teil der Gesamtkosten des Fertigungssystems [GE]
$k_{T,s}$	stufenbezogener Transportkostensatz [GE]
$k_{R,s}$	stufenbezogener Rüstkostensatz [GE]
$K(x, m)$	Gesamtkostenfunktion des Fertigungssystems in Abhängigkeit der Fertigungslosgröße bei Vorliegen einer identischen Transporthäufigkeit [GE]
$K(x, M)$	Gesamtkostenfunktion des Fertigungssystems in Abhängigkeit der Fertigungslosgröße bei Vorliegen eines Vektors stufenbezogener Transporthäufigkeiten [GE]
$K(m)$	kontinuierliche Kostenfunktion für die Transporthäufigkeit [GE]
$K(x)$	kontinuierliche Kostenfunktion für die Fertigungslosgröße [GE]
K_{Min}	minimale Gesamtkosten des Fertigungssystems [GE]
L	Lagerbestand [ME]
$LK_{L,s}$	stufenbezogene Lagerhaltungskosten je Fertigungslos [GE]
$LK_{R,s}$	stufenbezogene Rüstkosten je Fertigungslos [GE]
$LK_{T,s}$	stufenbezogene Transportkosten je Fertigungslos [GE]

m	Transporthäufigkeit; identische Anzahl Transportvorgänge je Fertigungslos über alle Stufen des Fertigungssystems
m_s	stufenbezogene Transporthäufigkeit; Anzahl Transportvorgänge je Fertigungslos zwischen Stufe s und Stufe $s+1$
m_{opt}^g	optimale ganzzahlige Transporthäufigkeit
m_s^g	ganzzahlige stufenbezogene Transporthäufigkeit
$m_{s,opt}^g$	optimale ganzzahlige stufenbezogene Transporthäufigkeit
m_s^{g*}	ganzzahlige stufenbezogene Transporthäufigkeit einer heuristischen Lösung
$m_{s,opt}^{GgO}$	globales Optimum einer stufenbezogenen Transporthäufigkeit
$m_{s,opt}^G(x)$	optimale reellwertige stufenbezogene Transporthäufigkeit für einen gegebenen Wert der Fertigungslosgröße
M	Vektor stufenbezogener Transporthäufigkeiten
M_{opt}^g	Vektor der ganzzahligen stufenbezogenen Transporthäufigkeiten einer Optimallösung
M^{g*}	Vektor der ganzzahligen stufenbezogenen Transporthäufigkeiten einer heuristischen Lösung
M_{opt}^{GgO}	Vektor der stufenbezogenen Transporthäufigkeiten des globalen Optimums
$\max(x_p)_{s,s+1}$	Maximum der Produktionsgeschwindigkeiten der Stufen s und $s+1$ [ME/ZE]
$\min(x_p)_{s,s+1}$	Minimum der Produktionsgeschwindigkeiten der Stufen s und $s+1$ [ME/ZE]
n	Fertigungslosauflagehäufigkeit im Planungszeitraum
q_i^s	Größe des Transportloses i zwischen Stufe s und Stufe $s+1$ des Fertigungssystems [ME]
q_{Min}^s	Größe des kleinsten Transportloses zwischen Stufe s und Stufe $s+1$ des Fertigungssystems [ME]

t	Zeit [ZE]
t_{DLZ}	Durchlaufzeit eines Fertigungsloses [ZE]
$t_{p,s}$	Produktionszeit eines Fertigungsloses auf Stufe s [ZE]
$t_{p,s}(q_i^s)$	Produktionszeit des Transportloses der Größe q_i^s auf Stufe s des Fertigungssystems [ZE]
T	Länge des Planungszeitraumes [ZE]
TPI^G	zeitgewichtete Lagerhaltung [ME·ZE] nach GOYAL
TPI_{SL}^G	zeitgewichtete Lagerhaltung nach GOYAL im Staulagerfall [ME·ZE]
TPI_{ZL}^G	zeitgewichtete Lagerhaltung nach GOYAL im Zerreißlagerfall [ME·ZE]
x	Fertigungslosgröße [ME]
x_a	Absatzgeschwindigkeit [ME/ZE]
x_{opt}^{GgO}	globales Optimum der Fertigungslosgröße
$x_{opt}^{Gm}(m)$	kostenminimale Fertigungslosgröße für einen gegebenen Wert der Transporthäufigkeit [ME]
x_{opt}^{Gmu}	kostenminimale Fertigungslosgröße für den Vektor der Transporthäufigkeiten einer Optimallösung [ME]
x_{opt}^{Gmu*}	kostenminimale Fertigungslosgröße für den Vektor der Transporthäufigkeiten einer heuristischen Lösung [ME]
$x_{opt}^{Gmu}(M)$	kostenminimale Fertigungslosgröße für einen gegebenen Vektor der Transporthäufigkeiten [ME]
$x_{p,s}$	Produktionsgeschwindigkeit der Stufe s [ME/ZE]
$x_s^{WG}(m_s^g; m_s^g + 1)$	stufenbezogene Vergleichslosgröße [ME]
[...]	größter ganzzahliger Wert kleiner als der eingeschlossene Ausdruck
[...]	kleinster ganzzahliger Wert größer als der eingeschlossene Ausdruck

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1:	Schematische Darstellung des Fertigungsprozeßtyps.....	2
Abbildung 2:	Zeitgewichtete Lagerhaltung im Staulagerfall für drei Transportlose nach GOYAL	8
Abbildung 3:	Optimierungsalgorithmus bei einer identischen Transporthäufigkeit.....	14
Abbildung 4:	Verlauf der Funktion $H_s(m_s)$ bei Berücksichtigung stufenbezogener Transporthäufigkeiten	19
Abbildung 5:	Grundsätzlicher Kostenverlauf bei unterschiedlichen Losgrößenkombinationen.....	22
Abbildung 6:	Kostenfunktionsverläufe in der Optimierungsprozedur bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten	24
Abbildung 7:	Verlauf der Funktion $K(x)$ bei Berücksichtigung stufenbezogener Transporthäufigkeiten	26
Abbildung 8:	Kostenfunktionsverläufe der ersten Iteration der Heuristik bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten	37
Abbildung 9:	Kostenfunktionsverläufe der zweiten Iteration der Heuristik bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten.....	37
Abbildung 10:	Lösungsfindung im Rahmen der Optimierungsprozedur bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten	42
Abbildung 11:	Zeitgewichtete Lagerhaltung im Zerreißlagerfall für drei Transportlose nach GOYAL	51
Abbildung 12:	Beweis der Konvexität für eine gegebene Fertigungslosgröße ..	60
Abbildung 13:	Verlauf des Anstieges der Funktion $H_s(m_s)$ bei Berücksichtigung stufenbezogener Transporthäufigkeiten	67

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1:	Parameterwerte des Zahlenbeispielles	30
Tabelle 2	Optimierungsrechnung bei einer identischen Transporthäufigkeit	30
Tabelle 3	Transportlosgrößen des numerischen Beispielles bei einer identischen Transporthäufigkeit.....	32
Tabelle 4	Ergebnisse der zweiten Iteration der Heuristik bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten	34
Tabelle 5	Ergebnisse der dritten Iteration der Heuristik bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten	35
Tabelle 6	Ergebnisse der zweiten Iteration der Optimierungsprozedur bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten.....	39
Tabelle 7	Ergebnisse der dritten Iteration der Optimierungsprozedur bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten.....	41
Tabelle 8	Ergebnisse der vierten Iteration der Optimierungsprozedur bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten.....	41
Tabelle 9	Transportlosgrößen des numerischen Beispielles bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten	44

1 Problemstellung

Vorrangig in der Sorten- und Serienfertigung besitzt die *Fertigungslosgrößenplanung* eine besondere Bedeutung. Sie beinhaltet die Bestimmung der Mengeneinheiten einer Produktart, welche ohne Unterbrechung durch andere Erzeugnisse in einem konkreten Fertigungssystem hergestellt werden sollen. Dabei verursacht jeder Loswechsel im Rahmen einer ein- bzw. mehrstufigen Produktion die Unterbrechung des Fertigungsprozesses, weil die Einrichtung der Produktionseinheit(en) auf die Anforderungen des neu aufzulegenden Loses notwendig ist.¹ Nach dem Aggregationsniveau kann sich die Planungsaufgabe auf eine Unternehmung, einen Unternehmensverbund oder ein abgegrenztes Produktionssegment beziehen. Prinzipiell wäre neben der angesprochenen Mengenplanung weiterhin die zeitliche Abfolge für die Herstellung der sortenbezogenen Fertigungslose zu disponieren. Die Lösung des *Lossequenzproblems* erfordert die Ermittlung überschneidungsfreier Belegungspläne bezüglich der betrachteten Produktionsanlagen, wobei die termingerechte Befriedigung aller Bedarfsanforderungen sicherzustellen ist.² Vom Lossequenzproblem wird in den folgenden Ausführungen jedoch abstrahiert.

Da die auf einer Anlage (Stufe) produzierten Erzeugniseinheiten zu der im Fertigungsablauf folgenden Stufe oder zum Verkauf an den Absatzbereich weitergeleitet werden müssen, ist eine Entscheidung darüber zu treffen, in welcher Art und Weise dieser Vorgang zu realisieren ist. Der Begriff Transportlos³ kennzeichnet hierbei die gleichzeitig zu der jeweiligen Folgestufe beförderten Produkteinheiten. Statische Losgrößenmodelle beschränken allerdings die logistischen Möglichkeiten zur Weitergabe eines Fertigungsloses sehr häufig auf lediglich zwei Alternativen. Charakteristisch für eine „geschlossene“ Fertigung ist, daß zwischen benachbarten Stufen nur der Transport kompletter Fertigungslose erfolgt. Im Gegensatz dazu können im Rahmen einer „offenen“ Fertigung die einzelnen Erzeugniseinheiten sofort nach ihrer Fertigstellung zur nächsten Stufe befördert werden.⁴

1 Vgl. z.B. Bloech et al., Produktion, 1998, S. 243f.

2 Vgl. Adam, Produktions- Management, 1997, S. 488.

3 In der angelsächsischen Literatur werden die Bezeichnungen *batch* (Szendrovits/Drezner, Multi-Stage Production, 1980), *subbatch* (Szendrovits, Manufacturing Cycle Time, 1975, Szendrovits/Wesolowsky, Variations in Optimizing, 1979, Szendrovits/Truscott, Manufacturing Cycle Time, 1989) und *sublot* (Glass/Gupta/Potts, Lot Streaming, 1994) für den Begriff Transportlos verwendet.

4 Vereinfachend wird in der Modellformulierung für eine „offene“ Fertigung sogar eine nur theoretisch mögliche Weitergabe infinitesimaler Produkteinheiten angenommen. Vgl. Bogaschewsky, Planung, 1998, S. 289.

Realistischerweise ist jedoch davon auszugehen, daß in Fertigungssystemen neben diesen beiden Transportvarianten die Verwirklichung einer Reihe weiterer Alternativen möglich ist, um die Mengeneinheiten eines Fertigungsloses nachgelagerten Produktionsstufen bzw. dem Absatz zuzuführen. Der Terminus „überlappende“ Fertigung kennzeichnet dabei die explizite Berücksichtigung der Transportlosgrößenplanung im Kontext des zugrundeliegenden Planungsproblems.⁵ Da im letztgenannten Fall die Bestimmung der Fertigungslosgröße durch die Ermittlung der Transportlosgröße zu ergänzen ist, erfordern derartige Planungsansätze eine Erweiterung der traditionellen Losgrößenmodelle.

Die Grundlage der sich anschließenden Betrachtungen stellt ein statisch deterministisches Einproduktartenlagerhaltungsmodell dar. Es bildet einen linearen Produktionsprozeß ab, dessen Struktur die Abbildung 1 grafisch veranschaulicht.

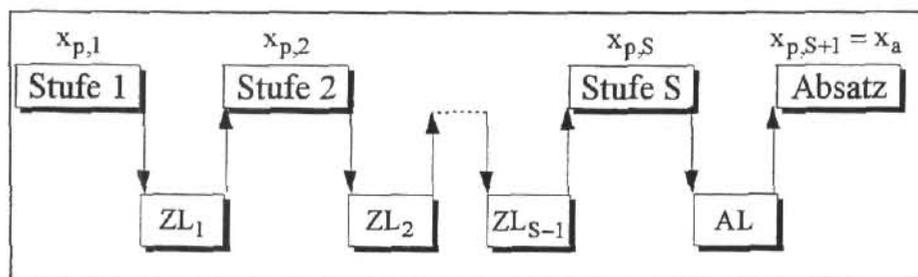


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Fertigungsprozessmodells⁶

Wird für die zu betrachtende Produktart im weiteren vorausgesetzt, daß sich die Produktionsgeschwindigkeiten der benachbarten Stufenpaare unterscheiden ($x_{p,s} \neq x_{p,s+1}$ für $s = 1(1)S$)⁷, so entsteht zwischen den korrespondierenden Stellen jeweils ein Lager (vgl. hierzu auch Abbildung 1). Ist die Produktionsgeschwindigkeit $x_{p,s}$ einer Fertigungsstufe s größer als die ihrer Folgestufe $s+1$ ($x_{p,s} > x_{p,s+1}$), dann liegt ein *Staulager* vor. Im umgekehrten Fall ($x_{p,s} < x_{p,s+1}$) tritt dagegen zwischen den gekoppelten Stufen ein *Zerreißlager* auf.

Die wesentlichen **Prämissen** des gewählten Planungsansatzes sind nachstehend beschrieben. Zusätzliche Annahmen werden in den entsprechenden Abschnitten dargestellt.

⁵ Vgl. zur Thematik der überlappenden Fertigung z.B. Adam, Produktions-Management, 1997, S. 621f.

⁶ ZL_s bezeichnet das Zwischenlager zwischen Stufe s und $s+1$, währenddessen AL das Absatzlager benennt.

⁷ Die Schreibweise $s=1(1)S$ entspricht der ganzzahligen Erhöhung der Laufvariable s von 1 bis S . Gebräuchlich ist ebenfalls die Verwendung der Notation $s=1, 2, \dots, S$. Dabei repräsentiert $x_{p,s+1}$ die Absatzgeschwindigkeit x_a .

- Gegenstand der Analyse sind mehrstufige Problemstellungen.
- Die Fertigungs- und Transportlosgrößen werden isoliert nur für eine Produktart geplant.
- Alle Planungsparameter sind bekannt und konstant über die Zeit.
- Die Länge der Planungsperiode beträgt T .⁸
- Es bestehen keine Kapazitätsbeschränkungen.
- Das Auftreten von Fehlmengen ist nicht erlaubt.
- Auf allen Produktionsstufen ist eine einheitliche Fertigungslosgröße zu produzieren.⁹
- Die Weitergabe von Transportlosen zur nächsten Fertigungsstufe kann bereits vor der vollständigen Herstellung eines Fertigungsloses auf der jeweiligen Stufe erfolgen. Allerdings ist zu gewährleisten, daß jedes Fertigungslos auf jeder Produktionsstufe ohne Unterbrechung mit nur einem Rüstvorgang erstellt wird.
- Die Transportlosgrößen müssen dem Gesetz einer geometrischen Folge gehorchen.¹⁰
- Für die Transporthäufigkeit(en) wird Ganzzahligkeit gefordert.

⁸ Die optimalen Ausprägungen der Entscheidungsvariablen statischer Lagerhaltungsmodelle werden nicht durch die Länge des Planungszeitraumes beeinflußt. Falls zur Modellformulierung ein konkreter Planungshorizont T Anwendung findet, wird unterstellt, daß er hinreichend groß ist, um aussagefähige Ergebnisanalysen zu ermöglichen. Vgl. Adam, Produktionsdurchführungsplanung, 1990, S. 857.

⁹ Die Ermittlung stufenspezifischer Losgrößen stellt keine sinnvolle Planungslösung dar, da in diesem Fall das Auftreten von Fehlmengen nicht mehr ausgeschlossen werden kann oder aber vermeidbare Kosten zu verzeichnen sind. Siehe hierzu auch Bogaschewsky, Planung, 1998, S. 295f.

¹⁰ Grundsätzlich sind auch andere Bildungsgesetze zur Bestimmung der Transportlosgrößen möglich. Bei unterschiedlich groß gewählten Transportlosen, die nicht einer geometrischen Reihe entsprechen, wäre das im folgenden diskutierte Modell in veränderter Form zu formulieren. Für die Planung identischer Transportlosgrößen zwischen den Stufen vgl. Szendrovits, Manufacturing Cycle Time, 1975, S. 298ff., Szendrovits, Rejoinder, 1976, S. 334ff., Szendrovits/Wesolowsky, Variations in Optimizing, 1979, S. 329ff., speziell S. 329-333, Szendrovits/Drezner, Multi-Stage Production, 1980, S. 623ff., Bogaschewsky, Planung, 1998, S. 296ff., Bogaschewsky/Buscher, Transportlosgrößenplanung, 1999, S. 338ff. Bogaschewsky/Buscher/Lindner, Simultanplanung, 1999, S. 5ff.

- Die Produkteinheiten sind (für die Bestimmung der optimalen Fertigungs- und Transportlosgrößen) beliebig (infinitesimal) teilbar.
- Die Produktionsgeschwindigkeiten der Stufen sind endlich.
- Die Absatzgeschwindigkeit ist kleiner als alle relevanten Produktionsraten ($x_a < x_{p,s}$ für $s=1(1)S$).
- Die Lagerdauer der Erzeugnisse ist nicht begrenzt.
- Die Transport- und Rüstzeiten sind vernachlässigbar.

Dem Modell liegt eine kurzfristig orientierte Sichtweise zugrunde. Die Planungsentscheidung wird daher nur von solchen Kostenarten beeinflusst, deren Höhe mit der gewählten Fertigungslosgröße, den Transportlosgrößen sowie der zeitlichen Verteilung der Loserstellung variiert. Im Hinblick auf die **entscheidungsrelevanten Kosten** sind fixe und variable Bestandteile zu unterscheiden. Letztere weisen eine direkte Abhängigkeit von der Losgröße auf, während dies bei den fixen Kosten nicht der Fall ist. Für die Modellformulierung relevante Kostenkategorien sind:

- *Rüstkosten*

Diese Kostengröße repräsentiert vereinfachend alle aus einem Erzeugniswechsel im Produktionsbereich resultierenden Kosten für die notwendigen Umrüst-, Vorbereitungs- und Anlaufprozesse. Als losfixe Kosten sind sie je Fertigungslos anzusetzen.¹¹

- *Transportkosten*

Es wird im folgenden unterstellt, daß die Weitergabe eines Transportloses zwischen den benachbarten Stufenpaaren entscheidungsrelevante Kosten in Höhe eines fixen Transportkostensatzes verursacht, so daß sich die Kosten der Transportvorgänge pro Fertigungslos jeweils aus der Multiplikation der entsprechenden Transporthäufigkeit mit dem genannten Kostensatz ergeben. Der Transportkostensatz sei dabei unabhängig von der zu befördernden Quantität der betrachteten Produktart.¹²

11 Indem die Rüstkosten bei jedem Produktionslauf einer Sorte als entscheidungsrelevant anzusehen sind, wird somit davon ausgegangen, daß die Fertigungsstufen zwischenzeitlich für die Herstellung weiterer Produkte genutzt werden.

12 Hiermit wird eine bestimmte Form der Funktion der entscheidungsrelevanten Transportkosten unterstellt. Alternativ sind bspw. auch sich stufenweise oder kontinuierlich mit der Transportmenge ändernde Kosten denkbar.

- *Lagerhaltungskosten*

Der angegebene Kostenbestandteil läßt sich pro Fertigungslos für ein Stufenpaar bestimmen, indem der losbezogene Lagerbestand des zwischen den betreffenden Stufen befindlichen Zwischenlagers mit dem korrespondierenden Lagerhaltungskostensatz monetär bewertet wird. Den größten Teil der Lagerhaltungskosten stellen die Kapitalbindungskosten dar. Ergänzend sind Kosten für die Handhabung, Pflege und Versicherung der gelagerten Erzeugnisse zu berücksichtigen, falls deren Höhe mit der Fertigungslosgröße variiert.¹³

Die Zielstellung besteht im vorliegenden Planungsproblem darin, die gesamten entscheidungsrelevanten Kosten zu minimieren. Die Einbeziehung der logistischen Fragestellung der Weitergabe von Transportlosen führt im gewählten Ansatz allerdings dazu, daß im Gegensatz zu den traditionellen Losgrößenmodellen neben der Fertigungslosgröße die Transporthäufigkeit(en) als weitere zu optimierende Größe(n) des Modells auftreten. In bezug auf die ein Fertigungslos konstituierenden Produkteinheiten kann festgestellt werden, daß eine zunehmende Anzahl von Transporten zwischen benachbarten Stellen über die Verringerung des Bestandes im betreffenden Lager eine Senkung der entsprechenden Lagerhaltungskosten hervorruft. Für das Lager zwischen zwei Stufen resultiert dieser Effekt aus dem Zeitpunkt der Weitergabe des ersten Teillooses, mit dem annahmegemäß ein vorgezogener Produktionsstart für die betrachtete Produktart auf der Folgestufe verbunden ist. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die im Vergleich zur „geschlossenen“ Fertigung erhöhte Frequenz der Produktweiterleitung eine transportkostensteigernde Wirkung besitzt. Anhand des dargelegten Sachverhaltes wird deutlich, daß sich die Transport- und Lagerhaltungskosten gegensätzlich entwickeln. Ein gleichfalls konträrer Kostenverlauf ist auch hinsichtlich der Rüst- und Lagerhaltungskosten festzustellen. Vergleichsweise große (kleine) Fertigungslose erfordern einerseits wenige (häufige) Sortenwechsel und führen demzufolge zu geringen (hohen) Umrüstkosten im Planungszeitraum, aber andererseits ergeben sich dadurch hohe (niedrige) Lagerhaltungskosten.

Die zu verzeichnenden wechselseitigen Beziehungen der einzelnen Kostenbestandteile bewirken, daß zur Lösung des Modells auf einen *Simultanplanungsansatz* zurückzugreifen ist. Allerdings gestatten die formulierten Modellannahmen eine Re-

¹³ Vgl. Bogaschewsky, Losgröße, 1996, Sp. 1143f. Für die Ermittlung der Lagerhaltungskosten ist es nicht maßgebend, daß sich die Produkteinheiten tatsächlich im Lager befinden. Sie können auch auf dem Transport dorthin sein oder in einem der Fertigungsstufe angegliederten Speicher liegen. Vgl. Bogaschewsky, Planung, 1998, S. 294.

duktion des Planungsproblems auf die Ermittlung der optimalen Ausprägungen der Fertigungslosgröße sowie der Transporthäufigkeit(en), da sich aufgrund der existierenden funktionalen Abhängigkeit zwischen der Fertigungslosgröße, den Transportlosgrößen und der/den Transporthäufigkeit(en) alle weiteren Modellgrößen aus den erstgenannten Werten ableiten lassen.

Im nächsten Kapitel wird der entwickelte Ansatz zur simultanen Fertigungs- und Transportlosgrößenplanung vorgestellt. Der erste Abschnitt befaßt sich dabei neben der Ermittlung der Funktion der entscheidungsrelevanten Kosten mit grundlegenden Aspekten der modellierten Problemstellung. Die beiden nachfolgenden Abschnitte zeigen auf, wie optimale Losgrößenpolitiken unter Berücksichtigung einer identischen Transporthäufigkeit für alle Stufen bzw. stufenbezogenen Transporthäufigkeiten bestimmt werden können. Im letzten Abschnitt des zweiten Kapitels werden dann die beiden Variationen des Planungsansatzes durch ein numerisches Beispiel verdeutlicht. Abschließend erfolgt eine Beurteilung der Modelle im Hinblick auf die abgebildete Planungssituation.

2 Planung der Fertigungslosgröße für mehrstufige Produktionssysteme unter Berücksichtigung unterschiedlicher Transportlosgrößen

2.1 Entwicklung und Diskussion der Grundelemente des Modellansatzes

Die in dem Modell angewendete Form der Gestaltung der stufenbezogenen Transportlosgrößen q_i^s geht auf einen Vorschlag von GOYAL¹⁴ zurück. Hierbei wird ein Fertigungslos derart auf mehrere Transportlose aufgeteilt, daß sich diese ausgehend vom ersten Los q_1^s entsprechend einer steigenden (Staulager) bzw. fallenden (ZerreiBlager) geometrischen Reihe entwickeln. Der Quotient dieser Folge wird – im Stau- und ZerreiBlagerfall¹⁵ – durch die Stufenleistungsrelation $x_{p,s}/x_{p,s+1}$ abgebildet. Zur Planung der wirtschaftlichen Fertigungs- und Transportlosgrößen ist zunächst eine zu optimierende Funktion der entscheidungsrelevanten Gesamtkosten $K(x,M)$ aufzustellen. Dabei kann konstatiert werden, daß sich die genannten Kosten additiv aus den entscheidungsrelevanten Kosten der S benachbarten Stufenpaare zusammensetzen. Wie sich zeigen wird, sind die stufenbezogenen Kostenfunktionen strukturell identisch. Aufgrund dieses Sachverhaltes ist es vorerst ausreichend, zwei aufeinanderfolgende Stufen zu betrachten. Hierbei wiederum konzentrieren sich die anschließenden Ausführungen auf die Bestimmung der stufenbezogenen Lagerhaltungskosten $LK_{L,s}$ für ein Fertigungslos. Die Basis zur Ermittlung des Kostenbestandteiles $LK_{L,s}$ bildet die *zeitgewichtete Lagerhaltung* TPI^G (Time [weighted] Process Inventory). Die Größe TPI^G ergibt sich aus der gesamten Fläche unter dem Lagerbestandsverlauf eines Fertigungsloses.¹⁶ Zur Veranschaulichung der Berechnung der zeitgewichteten Lagerhaltung soll die Abbildung 2 dienen.

Die Abbildung 2 zeigt exemplarisch den Lagerbestandsverlauf eines aus drei ungleichen Transportlosen bestehenden Fertigungsloses für ein *Staulager* (fett gezeichnete obere Linien). Der grundsätzliche Verlauf ist charakteristisch für den Staulagerfall und damit unabhängig von der Anzahl der Transportlose. Die dünn gezeichneten Linien deuten den Lagerbestandsverlauf für die einzelnen Transportlose an, wobei die linke (rechte) Flanke des ersten (dritten) Transportloses mit dem Verlauf des Gesamtlagerbestandes übereinstimmen und daher fett gezeichnet sind.

14 Vgl. Goyal, Optimum Production Quantity, 1977, S. 865ff.

15 Dies resultiert aus der Tatsache, daß im Staulagerfall das erste Transportlos q_1^s das kleinste, im ZerreiBlagerfall dagegen das größte ist.

16 Vgl. Szendrovits, Manufacturing Cycle Time, 1975, S. 302f. Die Grundlage der nachfolgenden Betrachtungen stellt der von SZENDROVITS unter Bedingung 2 analysierte Fall dar.

Zwecks besserer Beschreibung wurde die zu bestimmende Fläche in die Bereiche A_1 , A_{21} , A_{22} und A_3 unterteilt. Mit Hilfe der für die Fertigungsdauern (bzw. für die zeitliche Absatzreichweite von Stufe $S+1$) geltenden Relationen $t_{p,s} = x/x_{p,s}$ und $t_{p,s+1} = x/x_{p,s+1}$ lassen sie sich wie folgt angeben:

$$A_1 = \underbrace{\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right)}_{t_{p,s}(q_1^s) = t_{DLZ} - t_{p,s+1}} \cdot \underbrace{\left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot x_{p,s} \right]}_{q_1^s = q_{Min}^s} \cdot \frac{1}{2} \quad G-1$$

$$A_{21} = \underbrace{\left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right)}_{t_{p,s} + t_{p,s+1} - t_{DLZ}} \cdot \underbrace{\left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot x_{p,s} \right]}_{q_1^s = q_{Min}^s} \quad G-2$$

$$A_{22} = \underbrace{\left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right)}_{t_{p,s} + t_{p,s+1} - t_{DLZ}} \cdot \underbrace{\left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot x_{p,s+1} - \left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot x_{p,s} \right]}_{q_3^s - q_1^s} \cdot \frac{1}{2} \quad G-3$$

$$A_3 = \underbrace{\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right)}_{t_{DLZ} - t_{p,s}} \cdot \underbrace{\left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot x_{p,s+1} \right]}_{q_3^s} \cdot \frac{1}{2} \quad G-4$$

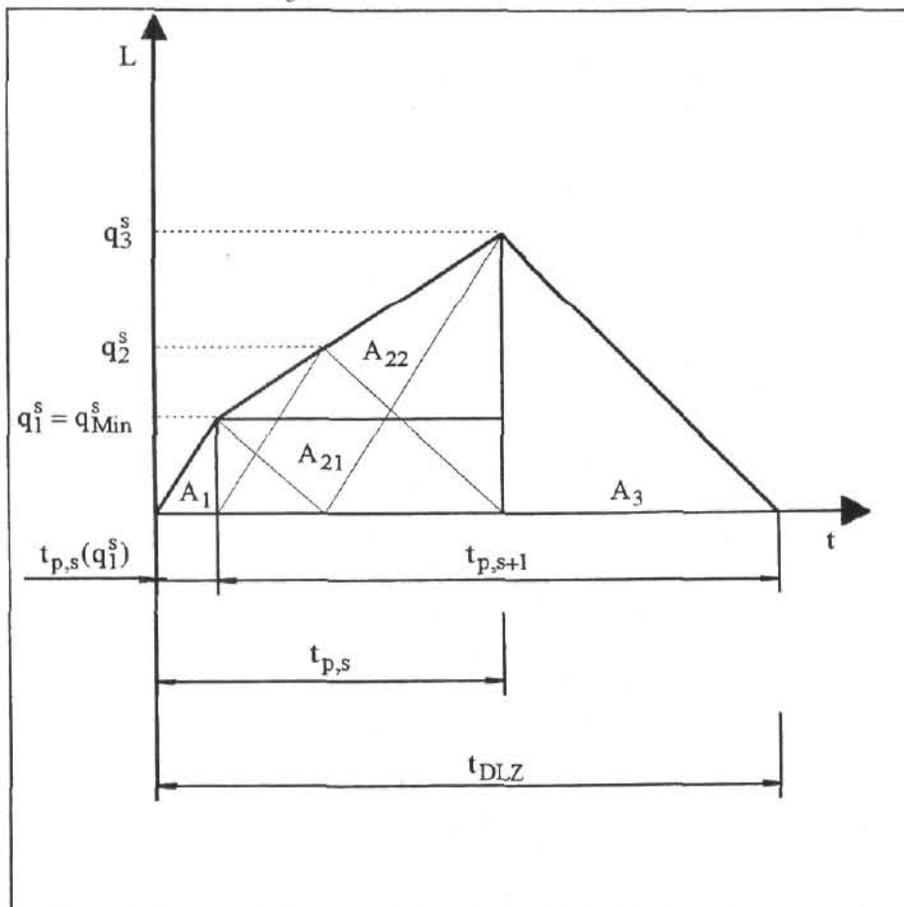


Abbildung 2: Zeitgewichtete Lagerhaltung im Staulagerfall für drei Transportlose nach GOYAL

In der Abbildung 2 bezeichnet die Durchlaufzeit t_{DLZ} eines Fertigungsloses die Zeitspanne vom Bearbeitungsbeginn des Loses auf Stufe s bis zur Fertigstellung der letzten Mengeneinheit auf Stufe $s+1$. Die zeitgewichtete Lagerhaltung errechnet sich aus der Summe der aufgeführten Flächen zu:

$$TPI_{SL}^G = A_1 + A_{21} + A_{22} + A_3 \quad G-5$$

Werden die Bestimmungsgleichungen der einzelnen Flächen (G-1 bis G-4) in G-5 eingesetzt und danach ausmultipliziert, so kann die zeitgewichtete Lagerhaltung im Staulagerfall ausgedrückt werden durch:¹⁷

$$TPI_{SL}^G = x \cdot t_{DLZ} - \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s}} + \frac{1}{x_{p,s+1}} \right) \quad G-6$$

Die Durchlaufzeit des gesamten Fertigungsloses bezogen auf die beiden in Abbildung 2 betrachteten Stufen ergibt sich zu:

$$t_{DLZ} = t_{p,s}(q_1^s) + t_{p,s+1} \quad G-7$$

Mit $t_{p,s}(q_1^s) = \frac{q_{Min}^s}{x_{p,s}}$ und $t_{p,s+1} = \frac{x}{x_{p,s+1}}$ gilt demzufolge:

$$t_{DLZ} = \frac{q_{Min}^s}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} \quad G-8$$

Aus dem Ersetzen der Durchlaufzeit in G-6 durch obige Gleichung folgt als zeitgewichtete Lagerhaltung für ein Staulager:

$$TPI_{SL}^G = x \cdot q_{Min}^s \cdot \frac{1}{x_{p,s}} + \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \quad G-9$$

Tritt im Gegensatz zu den bisherigen Ausführungen ein *Zerreißlager* zwischen den korrespondierenden Stellen auf, so werden die ein Fertigungslos bildenden Transportlose in genau umgekehrter Reihenfolge wie bei einem Staulager weitergegeben. Wenn die für den Staulagerfall geführte Betrachtung in äquivalenter Weise jetzt für das Zerreißlager angewendet wird, dann ergibt sich als zeitgewichtete Lagerhaltung:¹⁸

$$TPI_{ZL}^G = x \cdot q_{Min}^s \cdot \frac{1}{x_{p,s+1}} + \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s}} - \frac{1}{x_{p,s+1}} \right) \quad G-10$$

¹⁷ Eine ausführliche Darstellung zur Ermittlung der Bestimmungsgleichung der zeitgewichteten Lagerhaltung befindet sich in Anhang A 1.

¹⁸ Die detaillierte Herleitung dieser Gleichung erfolgt in Anhang A 2.

Die ein Stau- bzw. Zerreißlager kennzeichnenden Relationen $x_{p,s} > x_{p,s+1}$ bzw. $x_{p,s} < x_{p,s+1}$ lassen sich durch die Verwendung von Maximum-/Minimum-Operatoren auch mit $\min[x_{p,s}; x_{p,s+1}] < \max[x_{p,s}; x_{p,s+1}]$ beschreiben. Für den weiteren Verlauf dieses Arbeitsberichtes wird dabei für die Schreibweise der Maximum-/Minimum-Operatoren folgende vereinfachte Notation vereinbart:

$$\begin{aligned} \max[x_{p,s}; x_{p,s+1}] &:= \max(x_p)_{s,s+1} \\ \min[x_{p,s}; x_{p,s+1}] &:= \min(x_p)_{s,s+1} \end{aligned}$$

Die Nutzung der Maximum-/Minimum-Operatoren gestattet es, die Gleichungen G-9 und G-10 zu einer allgemeingültigen Bestimmungsgleichung der zeitgewichteten Lagerhaltung zusammenzufassen. Sie wird abgebildet durch:¹⁹

$$TPI^G = x \cdot q_{Min}^s \cdot \frac{1}{\max(x_p)_{s,s+1}} + \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{\min(x_p)_{s,s+1}} - \frac{1}{\max(x_p)_{s,s+1}} \right) \quad G-11$$

Da die in einem Fertigungslos enthaltenen Produkteinheiten durch die Summe aller Transportlose zwischen den jeweils benachbarten Stufen weitergeleitet werden müssen, gilt somit:

$$x = q_{Min}^s \cdot \sum_{i=1}^{m_s} \left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{i-1} \quad \text{für } s=1(1)S \quad G-12$$

Ausgehend von G-12 läßt sich die konkrete Reihenfolge der Weitergabe der einzelnen Transportlose im Hinblick auf ein Stufenpaar wie folgt ermitteln:

$$x = \sum_{i=m_s}^1 q_i^s \quad \text{falls } x_{p,s} < x_{p,s+1} \quad G-12.1$$

$$x = \sum_{i=1}^{m_s} q_i^s \quad \text{falls } x_{p,s} > x_{p,s+1} \quad G-12.2$$

Anhand von G-12 kann daher festgehalten werden:

$$q_{Min}^s = x \cdot A_s(q_{Min}^s, m_s) \quad \text{mit: } A_s(q_{Min}^s, m_s) = \frac{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{m_s} - 1}{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right) - 1}$$

für $s=1(1)S$ G-13

¹⁹ Bis hierhin ist die gewählte Vorgehensweise vergleichbar mit Goyal/Szendrovits, Lot Size Model, 1986, S. 205.

Das Ersetzen der kleinsten Transportlosgröße q_{Min}^s in G-11 durch G-13 sowie die Bewertung der sich ergebenden Gleichung mit dem stufenbezogenen Lagerhaltungskostensatz erbringt die nachstehenden fertigungslosbezogenen Lagerhaltungskosten eines benachbarten Stufenpaares:

$$LK_{L,s} = \frac{x^2 \cdot c_{L,s} \cdot A_s(q_{\text{Min}}^s, m_s)}{\max(x_p)_{s,s+1}} + \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{\min(x_p)_{s,s+1}} - \frac{1}{\max(x_p)_{s,s+1}} \right) \cdot c_{L,s} \quad \text{G-14}$$

Pro Fertigungslos sind für zwei aufeinanderfolgende Stufen neben den soeben berechneten Lagerhaltungskosten $LK_{L,s}$ des weiteren die losfixen Rüst- und Transportkosten als entscheidungsrelevante Kostenbestandteile zu berücksichtigen. Da die Stufe s ein Fertigungslos nach der Aufnahme der Produktion ununterbrochen bearbeitet, wird demzufolge nur ein Rüstvorgang pro Fertigungslos erforderlich. Damit ist pro Fertigungslos einmal der stufenbezogene Rüstkostensatz zu verrechnen und es gilt:

$$LK_{R,s} = k_{R,s} \quad \text{G-15}$$

Die fertigungslosbezogenen Transportkosten ergeben sich, indem die zwischen Stufe s und $s+1$ gewählte Transporthäufigkeit mit dem entsprechenden Transportkostensatz multipliziert wird.

$$LK_{T,s} = k_{T,s} \cdot m_s \quad \text{G-16}$$

Um die entscheidungsrelevanten Kosten eines mehrstufigen Produktionssystems zu erhalten, sind zunächst die Gleichungen G-14 bis G-16 zu addieren. Anschließend erfolgt eine Summation über alle relevanten S Stufenpaare. Wird die resultierende Gleichung noch mit der Anzahl der im Planungszeitraum aufzulegenden Lose (n bzw., da $B = n \cdot x$, mit B/x) multipliziert, so läßt sich die Funktion der entscheidungsrelevanten Gesamtkosten wie folgt angeben:

$$K(x, M) = \sum_{s=1}^S \left[\frac{x \cdot c_{L,s} \cdot A_s(q_{\text{Min}}^s, m_s) \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1}} + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{\min(x_p)_{s,s+1}} - \frac{1}{\max(x_p)_{s,s+1}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B \right] + \sum_{s=1}^S (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m_s) \cdot \frac{B}{x}$$

G-17

mit: $A_s(q_{\text{Min}}^s, m_s)$ aus G-13 und $x_{p,s+1} = x_a < \min_{1 \leq s \leq S} [x_{p,s}]$ sowie $M = \{m_1, m_2, \dots, m_S\}$

2.2 Optimierung bei einer identischen Transporthäufigkeit

Die in diesem Abschnitt betrachtete Planungssituation ist dadurch charakterisiert, daß zwischen den jeweils benachbarten Stufen eines Fertigungssystems unterschiedliche Transportlose befördert werden können. Einschränkend sei allerdings die Planung einer identischen Transporthäufigkeit für alle korrespondierenden Stufenpaare gefordert. Aufgrund dieses Sachverhaltes weisen sämtliche Elemente des Vektors M der Transporthäufigkeiten den gleichen Wert auf. Folglich gilt:

$$m_1 = m_2 = \dots = m_S = m = \text{const.}$$

Die zu ermittelnde optimale Planungslösung zeichnet sich unter den beschriebenen Rahmenbedingungen durch die Existenz nur einer einzigen Ausprägung der Transporthäufigkeit m aus. Wird m zunächst als Planungsparameter angesehen, so ist zur Bestimmung der optimalen Fertigungslosgröße für eine spezifische Ausprägung der Transporthäufigkeit zuerst die partielle Ableitung der Kostenfunktion G -17 nach x zu bilden, die erhaltene Gleichung null zu setzen und anschließend nach x aufzulösen. Die Berechnungsformel der optimalen Fertigungslosgröße für einen gegebenen Wert von m lautet hierbei:²⁰

$$x_{\text{opt}}^{\text{Gm}}(m) = \sqrt{\frac{\sum_{s=1}^S (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m)}{\sum_{s=1}^S \left[\frac{c_{L,s} \cdot A_s (q_{\text{Min}}^s \cdot m)}{\max(x_p)_{s,s+1}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\min(x_p)_{s,s+1}} - \frac{1}{\max(x_p)_{s,s+1}} \right) \cdot c_{L,s} \right]}} \quad \text{G-18}$$

Für die Optimierung des Modellansatzes ist m jedoch als Entscheidungsvariable zu betrachten. Die vorliegende Problemstellung ermöglicht es, zur Lösungsfindung auf einen von GOYAL für ein zweistufiges Produktionssystem vorgeschlagenen iterativen Algorithmus zurückzugreifen.²¹

Für die Optimierungsprozedur ist es von Vorteil, eine im folgenden als kontinuierliche Kostenfunktion für m bezeichnete Funktion zu verwenden. Diese Funktion ist nur von der Entscheidungsvariablen m abhängig und bildet die für einen konkreten Wert der Transporthäufigkeit nicht zu unterschreitenden entscheidungsrelevanten

²⁰ Die ausführliche Herleitung der Bestimmungsgleichung wird in Anhang C unter a) aufgezeigt. Aus der Konvexität der Kostenfunktion G -17 bezüglich x folgt, daß auch die hinreichende Optimalitätsbedingung erfüllt ist. Der entsprechende Beweis ist in Anhang B 1 enthalten.

²¹ Vgl. Goyal, Optimum Production Quantity, 1977, S. 868 sowie Bogaschewsky/Buscher/Lindner, Simultanplanung, 1999, S. 17ff.

Kosten ab.²² In allgemeiner Form ist zur Ermittlung der angesprochenen Funktion x in G-17 durch G-18 zu ersetzen. Für die Herleitung der kontinuierlichen Kostenfunktion für m werden die nachstehenden Vereinfachungen verwendet:

$$\alpha = \sum_{s=1}^S \left[\frac{c_{L,s} \cdot A_s(q_{\text{Min}}^s, m)}{\max(x_p)_{s,s+1}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\min(x_p)_{s,s+1}} - \frac{1}{\max(x_p)_{s,s+1}} \right) \cdot c_{L,s} \right]$$

$$\beta = \sum_{s=1}^S (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m)$$

Die Substitution von x in G-17 durch G-18 und die Anwendung der definierten Vereinfachungen erbringt:

$$K(m) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \alpha \cdot B + \beta \cdot \frac{B}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}} = \sqrt{\frac{\beta \cdot \alpha^2}{\alpha}} \cdot B + \sqrt{\frac{\beta^2 \cdot \alpha}{\beta}} \cdot B = 2 \cdot B \cdot \sqrt{\beta \cdot \alpha}$$

Werden die Vereinfachungen rückgängig gemacht, dann ergibt sich als kontinuierliche Kostenfunktion für m :

$$K(m) = 2 \cdot B \cdot \sqrt{\sum_{s=1}^S (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot \left[\sum_{s=1}^S \left[\frac{c_{L,s} \cdot A_s(q_{\text{Min}}^s, m)}{\max(x_p)_{s,s+1}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\min(x_p)_{s,s+1}} - \frac{1}{\max(x_p)_{s,s+1}} \right) \cdot c_{L,s} \right] \right]} \quad \text{G-19}$$

Da $K(m)$ das Grundelement des Optimierungsalgorithmus darstellt, ist es nunmehr möglich, die Vorgehensweise der Lösungsfindung zu beschreiben.²³ Anhand von G-18 läßt sich feststellen, daß für jedes – und daher auch für jedes ganzzahlige – m ein lokales Minimum der entscheidungsrelevanten Kosten auftritt. Diese Kosten lassen sich gemäß G-19 bestimmen. Die kleinste zulässige Ausprägung der Transporthäufigkeit wird dabei durch $m = 1$ wiedergegeben. Des weiteren besitzt die kontinuierliche Kostenfunktion für m einen konvexen Verlauf hinsichtlich m .²⁴ Wenn demnach ausgehend von $m = 1$ solange für jede nächsthöhere Ausprägung von m die Kosten nach G-19 berechnet werden, bis erstmals gilt, daß die für eine Transport-

²² Aufgrund der Konvexität der Kostenfunktion G-17 bezüglich x existiert für diese Ausprägung von m nur exakt ein Fertigungslosgrößenwert nach G-18, der für genau dieses spezielle m zu den geringsten Kosten im Planungszeitraum führt.

²³ Vgl. im folgenden auch Bogaschewsky/Buscher/Lindner, Simultanplanung, 1999, S. 19f.

²⁴ Vgl. den entsprechenden Konvexitätsbeweis in Anhang B 2.

häufigkeit ermittelten Kosten größer oder gleich den minimalen Kosten der nächstkleineren Transporthäufigkeit, so kann die Lösungssuche beendet werden. Der zuletzt genannte Wert repräsentiert damit die optimale ganzzahlige Transporthäufigkeit (vgl. Abbildung 3). Die Optimalität der erhaltenen Lösung ist aufgrund des konvexen Verlaufes der Funktion $K(m)$ gewährleistet. Diese Eigenschaft garantiert, daß oberhalb der zuletzt betrachteten Transporthäufigkeit keine weitere Ausprägung existieren kann, die zu geringeren Kosten führt. Die Planungslösung muß also die folgende Optimalitätsbedingung erfüllen:

$$K(m_{\text{opt}}^g - 1) \geq K(m_{\text{opt}}^g) \leq K(m_{\text{opt}}^g + 1)$$

$$F \geq F \leq \quad \text{G-20}$$

Die zu m_{opt}^g gehörende, zu minimalen Kosten führende Fertigungslosgröße kann anschließend mit Hilfe von G-18 kalkuliert werden.

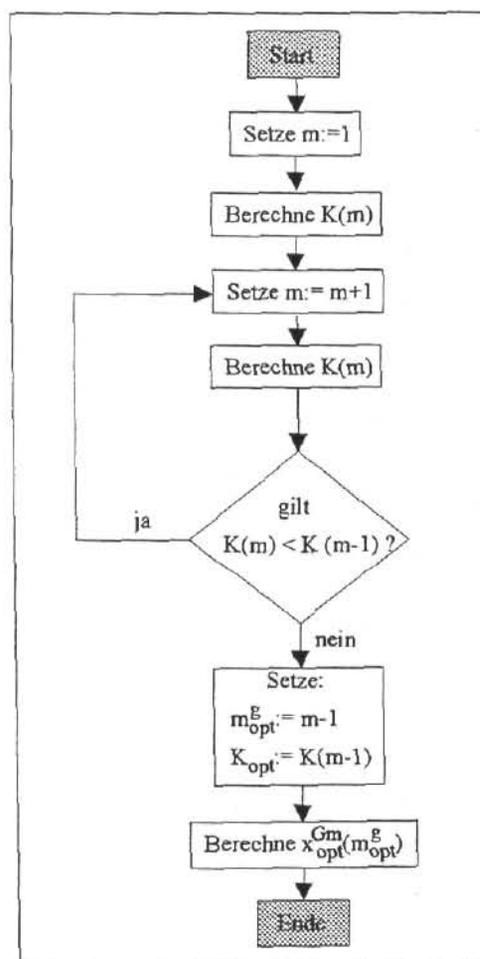


Abbildung 3: Optimierungsalgorithmus bei einer identischen Transporthäufigkeit

Möglichkeiten zur Bestimmung eines modifizierten Startwertes für die Transporthäufigkeit, die eine im allgemeinen schnellere Ermittlung der Optimallösung zulässt.

sen, sollen hier nicht vertieft werden. Zwei Algorithmen werden in BOGASCHESKY/BUSCHER/LINDNER detailliert diskutiert.²⁵ Während der eine, auf dem globalen Optimum der Transporthäufigkeit bei Annahme einer identischen Transportlosgröße für alle Stufenpaare basierende Algorithmus (ALGORITHMUS II) ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit auch auf die Betrachtung mehrstufiger Problemstellungen übertragen werden kann, ist dies hinsichtlich des zweiten Algorithmus (ALGORITHMUS I), nach Ansicht der Autoren, nur für den speziellen Fall möglich, daß das Verhältnis von maximaler zu minimaler Produktionsgeschwindigkeit über alle benachbarten Stufenpaare identisch ist.

2.3 Optimierung bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten

2.3.1 Ermittlung einer heuristischen Lösung

Im folgenden wird nun die im vorhergehenden Abschnitt formulierte Prämisse, daß eine *identische* Transporthäufigkeit für jedes gekoppelte Stufenpaar zu planen ist, aufgehoben. Bezüglich der jetzt betrachteten Planungssituation soll es möglich sein, neben der Beförderung von sich unterscheidenden Transportlosen zwischen den benachbarten Stellen ebenfalls ausgehend von einer betrachteten Stufe eine spezifische Transporthäufigkeit zu der jeweils nachgelagerten Stufe, im weiteren als stufenbezogene Transporthäufigkeit m_s bezeichnet, festzulegen. Da in der Realität die einzelnen Elemente des Vektors der Transporthäufigkeiten diskrete Variablen darstellen, sind nur ganzzahlige Planungsergebnisse für sie als zulässig zu erachten. Die Funktion der entscheidungsrelevanten Kosten (G-17) ist somit unter der Ganzzahligkeitsanforderung an alle stufenbezogenen Transporthäufigkeiten m_s zu minimieren. Infolgedessen sind statt einer Ausprägung der Transporthäufigkeit, wie im letzten Abschnitt, die optimalen, nicht zwangsläufig identischen Ausprägungen der einzelnen Transporthäufigkeiten zu bestimmen.

Optimale Fertigungslosgröße für gegebene Transporthäufigkeiten

Für einen konkreten Vektor M ergibt sich die optimale Fertigungslosgröße, indem die Kostenfunktion G-17 partiell nach x differenziert, die erhaltene Ableitung gleich null gesetzt und nach x aufgelöst wird. Die optimale Fertigungslosgröße eines *gegebenen* Vektors M errechnet sich damit aus:²⁶

²⁵ Vgl. Bogaschewsky/Buscher/Lindner, *Simultanplanung*, 1999, S. 20ff.

²⁶ Die detaillierte Herleitung der Gleichung erfolgt in Anhang C unter b). Bezüglich der hinreichenden Optimalitätsbedingung vgl. den Konvexitätsbeweis in Anhang B 1.

$$x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}}(M) = \left[\frac{\sum_{s=1}^S (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m_s)}{\sum_{s=1}^S \left[\frac{c_{L,s} \cdot A_s(q_{\text{Min}}^s, m_s)}{\max(x_p)_{s,s+1}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\min(x_p)_{s,s+1}} - \frac{1}{\max(x_p)_{s,s+1}} \right) \cdot c_{L,s} \right]} \right] \quad \text{G-21}$$

Unabhängig von jeder möglichen Parameterkonstellation müssen die in einem Los enthaltenen Mengeneinheiten eines Erzeugnisses mit mindestens einem Transportvorgang zwischen den relevanten Stufen weitergeleitet werden. Unter dem Aspekt der Kostenminimierung stellt daher, die für einen Transport je Stufenpaar ($m_s=1$ für $s=1(1)S$) mit G-21 ermittelte Losgröße eine untere Schranke der Fertigungslosgröße für sämtliche zulässigen Planungsergebnisse dar. Wenn diese Losgröße und der zugehörige Vektor M den Anfangswert der Suche nach Lösungen kennzeichnen, welche die entscheidungsrelevanten Kosten verbessern, gilt demzufolge, daß sie definitiv nur bei entsprechend höheren Ausprägungen der einzelnen Transporthäufigkeiten auffindbar sind, woraus wiederum eine gegenüber der Ausgangslösung größere optimale Losgröße resultiert.

Optimale stufenbezogene Transporthäufigkeit bei gegebener Fertigungslosgröße

Um ausgehend von der soeben festgelegten Startlösung einen neuen ganzzahligen Vektor M berechnen zu können, der mit der entsprechenden kostenminimierenden Fertigungslosgröße geringere entscheidungsrelevante Kosten verursacht, besteht folglich die Notwendigkeit, eine Vorgehensweise aufzuzeigen, wie die für ein spezifisches x optimalen ganzzahligen Werte der stufenbezogenen Transporthäufigkeiten zu bestimmen sind. Hierfür ist die Kenntnis der optimalen reellwertigen Transporthäufigkeit der jeweiligen Stufenpaare in bezug auf einen Losgrößenwert erforderlich. Aus der Kostenfunktion G-17 wird die optimale reellwertige Transporthäufigkeit für ein gegebenes x durch partielles Differenzieren der Funktion nach dem konkreten m_s , Nullsetzen der sich ergebenden Ableitung und dem anschließenden Auflösen nach der Entscheidungsvariablen gewonnen. Diese Aussage verdeutlicht, daß alle nicht von dem betrachteten m_s abhängigen Terme für die Differentiation Parameter darstellen.

Die optimale Transporthäufigkeit zwischen jedem Stufenpaar kann somit für jede gegebene Fertigungslosgröße isoliert voneinander bestimmt werden. Die optimale reellwertige Transporthäufigkeit für ein *spezifisches* x ist gegeben durch:²⁷

²⁷ Ausführlich wird diese Gleichung in Anhang C unter c) abgeleitet. Für die hinreichende Optimalitätsbedingung vgl. den in Anhang B 2 befindlichen Konvexitätsbeweis.

$$m_{s,\text{opt}}^G(x) = \frac{\ln(Z_s^+)}{\ln\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}}\right)} \quad \text{für } s=1(1)S \quad \text{G-22}$$

unter Nutzung von:

$$Y_s = 2 + \frac{\left(\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}}\right) - 1\right) \cdot \ln\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}}\right) \cdot c_{L,s} \cdot x^2}{k_{T,s} \cdot \max(x_p)_{s,s+1}} \quad \text{G-23}$$

und

$$Z_s^+ = \frac{Y_s}{2} + \sqrt{\frac{Y_s^2}{4} - 1} \quad \text{G-24}$$

Mit G-22 ist jetzt die Möglichkeit vorhanden, die optimale, in der Regel nicht ganzzahlige, stufenbezogene Transporthäufigkeit für eine *gegebene* Fertigungslosgröße zu ermitteln. Da die Planung der kostenminimierenden Fertigungslosgröße unter Berücksichtigung aller Stufenpaare erfolgt, stellt diese Größe für die jeweils benachbarten Stufen bei der Kalkulation der Transporthäufigkeit ein Datum dar. Die Fertigungslosgröße bei Mehrstufigkeit ist bei der Optimierung bezüglich der Berechnung der stufenbezogenen Transporthäufigkeiten wie ein Parameter zu behandeln.

Ermittlung der Vergleichslosgröße für ganzzahlige Transporthäufigkeiten

Wenn nun anhand eines für den mehrstufigen Fall geplanten Wertes für die Fertigungslosgröße die optimale reellwertige Transporthäufigkeit im Hinblick auf ein spezielles Stufenpaar eine Ausprägung annimmt, welche zwischen zwei ganzzahligen Transporthäufigkeiten m_s^g und $m_s^g + 1$ liegt, so ist für diese beiden Stufen zu entscheiden, ob m_s^g oder $m_s^g + 1$ Transportvorgänge durchzuführen sind. Die Wahlentscheidung beeinflussen bei gegebenen x nur solche Kostenbestandteile von G-17, die durch die betrachtete Transporthäufigkeit beeinflusst werden. Diese lassen sich isoliert für jedes Stufenpaar wie folgt angeben:

$$H_s(m_s) = \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot (L_s - 1) \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1} \cdot \left[(L_s)^{m_s} - 1 \right]} + k_{T,s} \cdot m_s \cdot \frac{B}{x} \quad \text{mit: } L_s = \frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \quad \text{für } s=1(1)S$$

G-25

Ist für zwei korrespondierende Stufen die Realisierung von m_s^g Transporten vorteilhaft, dann gilt aufgrund von G-25:

$$H_s(m_s^g) \leq H_s(m_s^g + 1)$$

G-26

In bezug auf ein Stufenpaar stellt sich bei einem bestimmten Wert der gemeinsamen Fertigungslosgröße Kostengleichheit bei m_s^g und $m_s^g + 1$ Transportvorgängen ein. Bei diesem x -Wert liegt G-26 in Gleichungsform vor. Werden auf beiden Seiten der sich ergebenden Gleichung die konkreten Funktionen nach G-25 eingesetzt, so resultiert daraus:

$$\frac{x \cdot c_{L,s} \cdot (L_s - 1) \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1} \cdot \left[(L_s)^{m_s^g} - 1 \right]} + \underbrace{k_{T,s} \cdot m_s^g \cdot \frac{B}{x}}_{\text{Term 1}} = \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot (L_s - 1) \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1} \cdot \left[(L_s)^{m_s^g+1} - 1 \right]} + k_{T,s} \cdot (m_s^g + 1) \cdot \frac{B}{x}$$

Term 2

G-27

Um den gesuchten Losgrößenwert für x , bei dem $H_s(m_s^g) = H_s(m_s^g+1)$ gilt, zu erhalten, sind auf beiden Seiten von G-27 die mit Term 1 und Term 2 gekennzeichneten Ausdrücke zu subtrahieren und nachfolgend ist mit x/B sowie $\max(x_p)_{s,s+1}$ zu multiplizieren. Wird die modifizierte Gleichung nach x aufgelöst, dann ergibt sich die relevante Ausprägung der Fertigungslosgröße, im weiteren als stufenbezogene Vergleichslosgröße bezeichnet, separat für jedes Stufenpaar zu:

$$x_s^{WG}(m_s^g, m_s^g + 1) = \sqrt{\frac{k_{T,s} \cdot \max(x_p)_{s,s+1}}{c_{L,s} \cdot (L_s - 1) \cdot \left\{ \frac{1}{\left[(L_s)^{m_s^g} - 1 \right]} - \frac{1}{\left[(L_s)^{m_s^g+1} - 1 \right]} \right\}}} \quad \text{für } s=1(1)S$$

G-28

G-28 erlaubt zunächst die Feststellung, daß m_s^g Transporte solange für eine Stufenpaar kostenminimierend sind, wie die für alle Stufen geplante Fertigungslosgröße den Wert der Vergleichslosgröße x_s^{WG} nicht überschreitet, bei dem die Transporthäufigkeiten m_s^g und $m_s^g + 1$ für diese beiden Stufen hinsichtlich der Kostenwirkung gleichwertig sind. Tritt der Fall auf, daß anhand einer gemeinsamen Fertigungslosgröße für zwei benachbarte Stufen die zugehörige optimale reellwertige Transporthäufigkeit zwischen $m_s^g - 1$ und m_s^g liegt, besitzt die für m_s^g und $m_s^g + 1$ geführte Argumentation in vergleichbarer Weise Gültigkeit. Damit kann konstatiert werden, daß in allgemeiner Form m_s^g Transportvorgänge für zwei benachbarte Stufen genau dann optimal sind, wenn die nachstehende Bedingung erfüllt ist:

$$x_s^{\text{WG}}(m_s^g - 1; m_s^g) \leq x \leq x_s^{\text{WG}}(m_s^g; m_s^g + 1)$$

für $s=1(1)S$

G-29

Wie die Analyse von G-29 aufzeigt, besteht die Möglichkeit, daß die gemeinsame Fertigungslosgröße identisch ist mit der speziellen Vergleichslosgröße eines konkreten Stufenpaares. In exakt diesem Punkt ist es hinsichtlich der resultierenden Kosten unerheblich, ob zwischen den betrachteten Stufen m_s^g oder $m_s^g + 1$ (bzw. $m_s^g - 1$ oder m_s^g) Transporte erfolgen. Aufgrund der Konvexität der Funktion G-25 gilt, daß als kostenminimierende Transporthäufigkeiten nur die beiden dem reellen Wert direkt benachbarten Transporthäufigkeiten in Frage kommen. Sie werden im vorliegenden Fall durch m_{s1}^g und $m_{s1}^g + 1$ abgebildet und führen zu den gleichen Kosten gemäß G-25 (Vgl. dazu auch G-27). In grafischer Form zeigt die Abbildung 4 den Verlauf der Funktion $H_s(m_s)$ in Abhängigkeit von den Ausprägungen der Transporthäufigkeit für die dargelegte Situation.

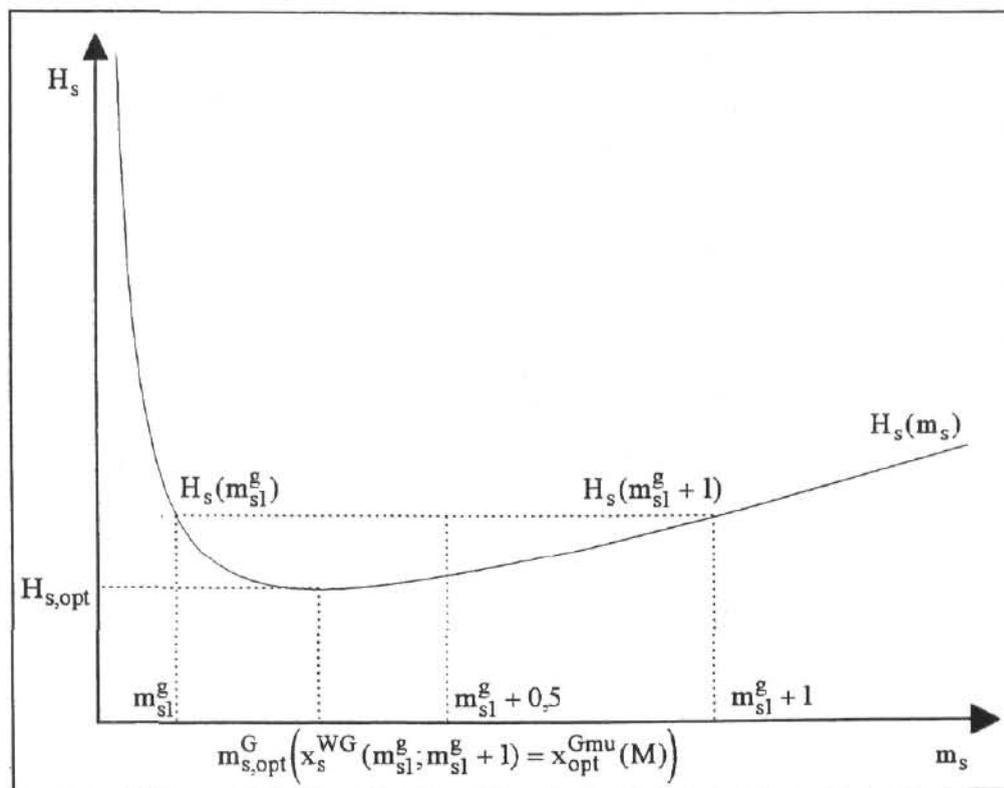


Abbildung 4: Verlauf der Funktion $H_s(m_s)$ bei Berücksichtigung stufenbezogener Transporthäufigkeiten

Häufig wird jedoch der Fall eintreten, daß die für alle Stufen geplante Fertigungslosgröße nicht genau mit einem Wert der Vergleichslosgröße übereinstimmt, bei dem ein Stufenpaar indifferent ist zwischen zwei beliebigen ganzzahligen Transporthäufigkeiten m_s^g und $m_s^g + 1$. In diesem Fall läßt sich die optimale ganzzahlige stufenbezogene Transporthäufigkeit für einen gegebenen Fertigungslosgrößenwert bestimmen, indem bezüglich des betrachteten Stufenpaares zuerst die entspre-

chende optimale Transporthäufigkeit nach G-22 berechnet und nachfolgend mit den beiden dieser Ausprägung direkt benachbarten ganzzahligen Transporthäufigkeiten die zugehörige Vergleichslosgröße ermittelt wird. Befindet sich dabei die Fertigungslosgröße unterhalb (oberhalb) des Wertes der Vergleichslosgröße, so stellt die kleinere (größere) der beiden ganzzahligen Transporthäufigkeiten die optimale Ausprägung dar. Wenn Identität von Fertigungs- und stufenbezogener Vergleichslosgröße zu verzeichnen ist, sind demzufolge die beiden ganzzahligen Transporthäufigkeiten gleichwertig, da sie zu exakt denselben Kosten nach G-25 führen.

Es zeigt sich, daß die Bestimmung der ganzzahlig optimalen Transporthäufigkeiten für die Stufenpaare recht aufwendig ist. Wenn allerdings die nachfolgend herausgearbeitete Bedingung zutrifft, kann auf die Ermittlung der stufenbezogenen Vergleichslosgröße verzichtet werden.

Hierfür ist es hilfreich, sich zu verdeutlichen, welche Ausprägung die optimale reellwertige stufenbezogene Transporthäufigkeit $m_{s,opt}^G$ für einen gegebenen Vergleichslosgrößenwert $x_s^{WG}(m_s^g; m_s^g + 1)$ nie überschreitet. Wie bereits erwähnt wurde, liegt die relevante Ausprägung zwischen den jeweils benachbarten ganzzahligen Werten m_s^g und $m_s^g + 1$. Des weiteren gilt, daß für jede Fertigungs- bzw. Vergleichslosgröße nur genau eine spezielle Transporthäufigkeit nach G-22 existiert, die in bezug auf den Losgrößenwert die minimalen Kosten entsprechend G-25 erbringt. Da die Funktion $H_s(m_s)$ unabhängig von der konkreten stufenbezogenen Vergleichslosgröße $x_s^{WG}(m_s^g; m_s^g + 1)$ strukturell den in Abbildung 4 illustrierten Verlauf aufweist, der ausgehend von m_s^g bis zum Optimum stärker fällt und anschließend mit einer geringeren Steigung bis $m_s^g + 1$ ansteigt, gilt, daß die optimale reellwertige Transporthäufigkeit für jeden nach G-28 ermittelten Wert der Vergleichslosgröße immer näher an m_s^g als an $m_s^g + 1$ und demzufolge stets unterhalb von $m_s^g + 0,5$ liegen wird.²⁸ Somit gilt zunächst, falls die für ein gegebenes x optimale reellwertige Transporthäufigkeit größer oder gleich $m_s^g + 0,5$ ist, dann repräsentiert $m_s^g + 1$ die kostenminimierende Transportanzahl.

Da auch die optimale reellwertige Transporthäufigkeit für eine stufenbezogene Vergleichslosgröße $x_s^{WG}(m_s^g + 1; m_s^g + 2)$ bezüglich $m_s^g + 1$ und $m_s^g + 2$ zwischen diesen beiden Werten aufzufinden ist, gilt weiterhin, daß $m_s^g + 1$ auf jeden Fall dann für

²⁸ Dieser Effekt resultiert deshalb aus der Funktion $H_s(m_s)$, weil sie sich aus zwei Teilfunktionen ergibt, wobei der Funktionsteil, welcher Bestandteil der stufenbezogenen Lagerhaltungskosten ist, sich asymptotisch der Abszisse nähert. Ein mathematisch geführter Beweis ist in Anhang D enthalten.

jede nach G-22 ermittelte Transporthäufigkeit die optimale Anzahl Transporte darstellt, wenn deren Wert zwischen $m_s^g + 0,5$ und $m_s^g + 1$ liegt.²⁹

Ablauf der Heuristik

Diesen Ausführungen folgend kann nunmehr die vollständige Arbeitsweise der Heuristik vorgestellt werden. Zuerst ist, wie zu Beginn dieses Abschnittes festgelegt wurde, für die optimale Fertigungslosgröße bezüglich $m_s^g = 1$ für jedes Element des Vektors M nach einem ganzzahligen Vektor der stufenbezogenen Transporthäufigkeiten zu suchen, der geringere Gesamtkosten nach G-17 verursacht. Unterhalb der Ausgangstransporthäufigkeiten existiert damit definitiv kein weiterer zulässiger ganzzahliger Vektor M . Kostenverbessernde ganzzahlige Ausprägungen der einzelnen Transporthäufigkeiten liegen, wenn die Planungsparameter es zulassen, daher oberhalb von $m_s^g = 1$ für $s=1(1)S$. Der Startwert der Losgröße bildet jetzt die Grundlage zur Ermittlung der zugehörigen ganzzahligen Transporthäufigkeiten auf Basis der dargelegten Berechnungsvorschrift.

Für den neu errechneten Vektor M gilt, daß es keinen weiteren ganzzahligen Vektor der Transporthäufigkeiten gibt, der für die Ausgangslosgröße geringere Kosten erbringt. Hierbei wurde bereits ausgeführt, daß jede ganzzahlige stufenbezogene Transporthäufigkeit im allgemeinen für einen gewissen Bereich der Fertigungslosgröße optimal ist (vgl. G-29). Aggregiert über alle Stufenpaare bedeutet dies ebenfalls, daß jeder ganzzahlige Vektor M in der Regel für ein bestimmtes Intervall der Losgröße optimal ist.

Läßt sich für den Startwert der Losgröße ein vom Startvektor abweichender ganzzahliger Vektor M ermitteln, der zu geringeren Kosten führt, so folgt aus G-29, daß die kostenminimierende Fertigungslosgröße des Ausgangsvektors schon im Optimalitätsbereich des neuen Vektors liegt. Damit existiert bezüglich $M = \{1, 1, \dots, 1\}$ ein anderer Vektor M , der für die untersuchte Ausgangslosgröße die Gesamtkosten minimiert. Für ihn wiederum gibt es jedoch gemäß G-21 nur genau eine kostenminimierende Losgröße. Dabei ist festzustellen, daß höhere Werte der Transporthäufigkeiten m_s^g auch in einer höheren Losgröße resultieren. Somit läßt sich definieren, daß der neue Vektor der Transporthäufigkeiten und die entsprechende Fertigungslosgröße diejenigen Ausprägungen der Entscheidungsvariablen repräsentieren, welche bis hierhin die niedrigsten Gesamtkosten verursachen.

²⁹ Vgl. zur Veranschaulichung der vereinfachten Berechnungsvorschrift auch G-29.

Die angegebene Vorgehensweise garantiert, daß zwischen der Startlösung und der neuen Lösung kein weiterer Vektor M und damit auch keine andere Fertigungslosgröße zu geringeren Gesamtkosten führt. Werden die bis hierhin betrachteten Vektoren M als Planungsparameter angesehen, dann ist es möglich, die diskutierte Problematik durch die beiden Gesamtkostenfunktionen, wie sie Abbildung 5 zeigt, zu veranschaulichen.

In Abbildung 5 stelle M_1^* den Startvektor mit der zugehörigen kostenminimalen Losgröße dar. Diese Losgröße liegt aber bereits im Optimalitätsbereich des Vektors M_2^* , der für sie geringere Kosten erbringt. Für den Vektor M_2^* ermöglicht aber die ihm entsprechende optimale Losgröße eine weitere Verringerung der Gesamtkosten.

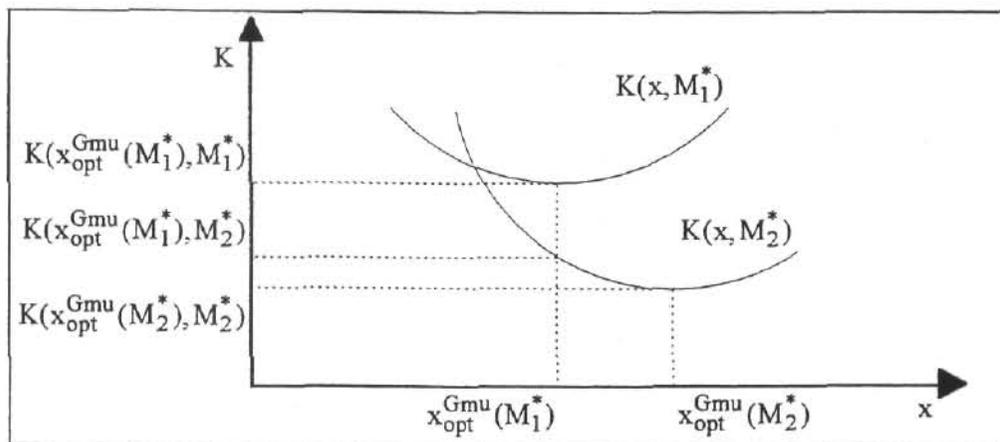


Abbildung 5: Grundsätzlicher Kostenverlauf bei unterschiedlichen Losgrößenkombinationen

Die jeweils berechnete, vorerst kostengünstigste Lösung stellt die neue Ausgangslösung der Suche nach verbesserten Planungslösungen dar. Letztere können aber bedingt durch die gewählte Vorgehensweise nur noch oberhalb der jetzt optimalen Ausprägungen der Entscheidungsvariablen liegen.

Der anhand der Startlösung beschriebene Prozeß ist für die zuletzt ermittelte Lösung und jede weitere aus ihr generierte solange fortzusetzen, wie gilt, daß sich die kostenminimierende Fertigungslosgröße des bisher kostengünstigsten Vektors M im Optimalitätsbereich eines anderen Vektors befindet, der für dieses x zu geringeren Kosten führt. Eine heuristische Lösung des Planungsproblems ist gefunden, wenn erstmals der kostenminimale Losgrößenwert eines bis dahin kostengünstigsten Vektors M nicht im Optimalitätsbereich eines weiteren Vektors aufzufinden ist. Die entsprechenden Ausprägungen der Entscheidungsvariablen stellen dann die minimalen bis hierhin erreichbaren Gesamtkosten dar. Mit der heuristischen Lösung ist demzufolge eine stabile Abschlußlösung gefunden, die mit der im nächsten Ab-

schnitt betrachteten Vorgehensweise auf Optimalität zu überprüfen ist. Nachstehend ist die schrittweise Vorgehensweise zur Ermittlung der heuristischen Lösung nochmals systematisch aufgeführt.

Algorithmus zur Ermittlung einer heuristischen Lösung

Schritt 1:

- $i=1$
- Setze $m_{s,i}^* = 1$ für $s=1(1)S$.

Schritt 2:

- Bestimme $x_i^* = x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}}(M_i^*)$ in G-21 mit: $M_i^* = \{m_{1,i}^*, m_{2,i}^*, \dots, m_{S,i}^*\}$.

Schritt 3:

- Bestimme $m_{s,i,\text{opt}}^G(x_i^*)$ für $s=1(1)S$ in G-22.
 - Falls $m_{s,i,\text{opt}}^G(x_i^*) \leq 1$ setze $\hat{m}_{s,i} = 1$.
 - Falls $m_{s,i,\text{opt}}^G(x_i^*) \geq \lfloor m_{s,i,\text{opt}}^G(x_i^*) \rfloor + 0,5$ setze $\hat{m}_{s,i} = \lceil m_{s,i,\text{opt}}^G(x_i^*) \rceil$.
 - Sonst bestimme $x_s^{\text{WG}} = x_s^{\text{WG}} \left(\lfloor m_{s,i,\text{opt}}^G(x_i^*) \rfloor; \lceil m_{s,i,\text{opt}}^G(x_i^*) \rceil \right)$ in G-28.
 - Falls $x_i^* < x_s^{\text{WG}}$ setze $\hat{m}_{s,i} = \lfloor m_{s,i,\text{opt}}^G(x_i^*) \rfloor$.
 - Falls $x_i^* > x_s^{\text{WG}}$ setze $\hat{m}_{s,i} = \lceil m_{s,i,\text{opt}}^G(x_i^*) \rceil$.
 - Falls $x_i^* = x_s^{\text{WG}}$ setze $\hat{m}_{s,i}$ gleich $\lfloor m_{s,i,\text{opt}}^G(x_i^*) \rfloor$ oder $\lceil m_{s,i,\text{opt}}^G(x_i^*) \rceil$.

Schritt 4:

- Test: $m_{s,i}^* = \hat{m}_{s,i}$ für $s=1(1)S$.
 - Falls ja: Gehe zu Schritt 5.
 - Falls nein: Setze $m_{s,i+1}^* = \hat{m}_{s,i}$ für $s=1(1)S$ sowie $i = i + 1$ und gehe zu Schritt 2.

Schritt 5:

- Setze $m_s^{g^*} = m_{s,i}^*$ für $s=1(1)S$.
- Setze $x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}^*} = x_i^*$
- Bestimme $K(x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}^*}, M^{g^*})$ in G-17 mit: $M^{g^*} = \{m_1^{g^*}, m_2^{g^*}, \dots, m_S^{g^*}\}$.
- Stop

2.3.2 Ermittlung der Optimallösung

Im Hinblick auf die Bestimmung der optimalen Planungslösung kann zunächst nicht ausgeschlossen werden, daß es neben der Fertigungslosgröße der heuristischen Abschlußlösung weitere Losgrößen zu ganzzahligen Vektoren M gibt, die ebenfalls die Bedingung erfüllen, daß für sie keine anderen, als die zur Kalkulation verwendeten, ganzzahligen Vektoren der Transporthäufigkeiten existieren, die das Erreichen geringerer Gesamtkosten gestatten. Damit sind diese Lösungen im Sinne der heuristischen Abschlußlösung gleichermaßen als stabil zu bezeichnen. Die sie repräsentierenden Ausprägungen der Entscheidungsvariablen können, aber müssen nicht gegenüber einer im Kontext der nachfolgend dargestellten Optimierungsprozedur berechneten vorläufigen Optimallösung, wie z.B. der heuristischen Lösung, geringere entscheidungsrelevante Kosten erbringen. Eine definitive Entscheidung kann dabei nur anhand eines direkten Kostenvergleiches der alternativen Lösungen getroffen werden.

Seien die zu untersuchenden Vektoren M wiederum als Planungsparameter anzusehen, so lassen sich für sie zwei Gesamtkostenfunktionen gemäß G-17 bestimmen, und es wäre möglich, daß beispielsweise die in der Abbildung 6 illustrierten Fälle auftreten.

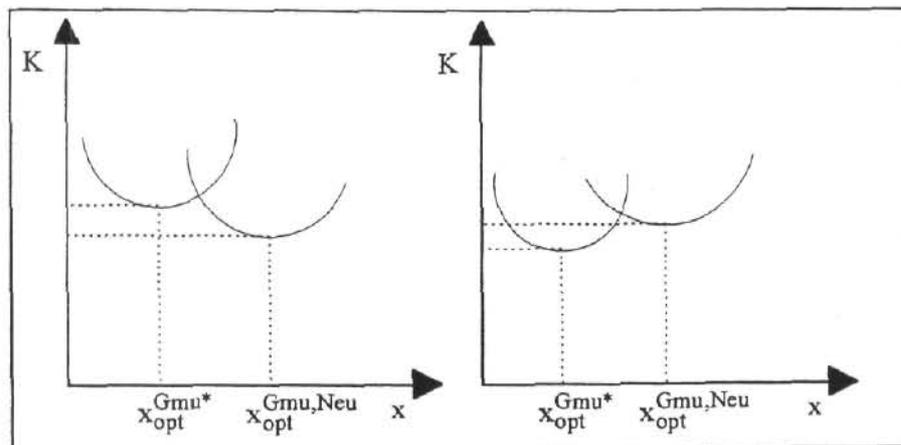


Abbildung 6: Kostenfunktionsverläufe in der Optimierungsprozedur bei Berücksichtigung stufenbezogener Transporthäufigkeiten

Für die obige Abbildung wurde exemplarisch angenommen, daß die heuristische Abschlußlösung zunächst die vorläufige Optimallösung repräsentiert. Während im linken Diagramm eine andere, geringere Gesamtkosten verursachende stabile Lösung vorliegt, stellt die heuristische Lösung im rechten Diagramm weiterhin die vorläufige Optimallösung dar, wobei die zu höheren Kosten führende Lösung ebenso als stabil zu kennzeichnen ist.

Für die anschließenden Ausführungen ist anzumerken, daß die Ausprägungen der Fertigungslosgröße und der stufenbezogenen Transporthäufigkeiten im globalen Kostenminimum aufgrund der Konvexitätseigenschaften der Funktion G-17 eine nicht zu unterschreitende untere Schranke der erreichbaren entscheidungsrelevanten Kosten für alle weiteren möglichen Planungslösungen darstellen.³⁰

Werden vorerst die Ganzzahligkeitsanforderungen an die Elemente des Vektors M aufgehoben, so ist es möglich, die für ein konkretes x nicht zu unterschreitenden Kosten zu berechnen, indem für dieses x die optimale Ausprägung eines jeden m_s aus G-22 ermittelt wird und nachfolgend mit allen relevanten Werten die Kosten nach G-17 zu bestimmen sind. Allgemeingültig bedeutet dies, daß jedes m_s in G-17 durch die entsprechende Gleichung G-22 zu substituieren ist. Damit ergibt sich die folgende, nur von x abhängige Funktion, im weiteren als kontinuierliche Kostenfunktion für x bezeichnet:

$$K(x) = \sum_{s=1}^S \left\{ \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot (L_s - 1) \cdot B}{\left[\begin{array}{c} \left(\frac{\ln(Z_s^+)}{\ln(L_s)} \right) \\ (L_s) \quad -1 \cdot \max(x_p)_{s,s+1} \end{array} \right]} + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{\min(x_p)_{s,s+1}} - \frac{1}{\max(x_p)_{s,s+1}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B \right\} +$$

³⁰ Die globalen Optima der Fertigungslosgröße bzw. der stufenbezogenen Transporthäufigkeiten lassen sich nicht direkt mit Hilfe von Bestimmungsgleichungen ermitteln. Von den Autoren wurde jedoch ein iterativer Algorithmus entwickelt, der die Berechnung dieser Werte gestattet. Die Darstellung der Prozedur soll dabei im vorliegenden Arbeitsbericht nicht erfolgen. Allerdings erlaubt eine an den Algorithmus zur Ermittlung der heuristischen Lösung angelehnte Vorgehensweise ebenfalls die Bestimmung der relevanten Ausprägungen der Entscheidungsvariablen. Hierfür wird vorgeschlagen, in bezug auf die Fertigungslosgröße sowie die einzelnen m_s eine als hinreichend genau erachtete Anzahl von Nachkommastellen zu definieren und bei jeder Iteration die Rechenergebnisse auf die festgelegten Nachkommastellen zu runden. Wenn des weiteren in *Schritt 3* auf die Ermittlung der ganzzahlig optimalen Ausprägungen der m_s verzichtet wird, dann stabilisieren sich die Werte der Entscheidungsvariablen ausschließlich im globalen Kostenminimum. Der modifizierte Algorithmus konvergiert hierbei mit einer endlichen Anzahl von Iterationsschritten im globalen Kostenminimum, da mit jeder Iteration eine Verringerung der entscheidungsrelevanten Kosten einhergeht.

$$+ \sum_{s=1}^S \left(k_{R,s} + k_{T,s} \cdot \frac{\ln(Z_s^+)}{\ln(L_s)} \right) \cdot \frac{B}{x}$$

mit: $L_s = \frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}}$ für $s=1(1)S$ und Z_s^+ aus G-24 G-30

Eine grafische Darstellung des Verlaufes von $K(x)$ bei Wahl der für jedes x optimalen (nicht zwangsläufig ganzzahligen) m_s -Werte zeigt die Abbildung 7.

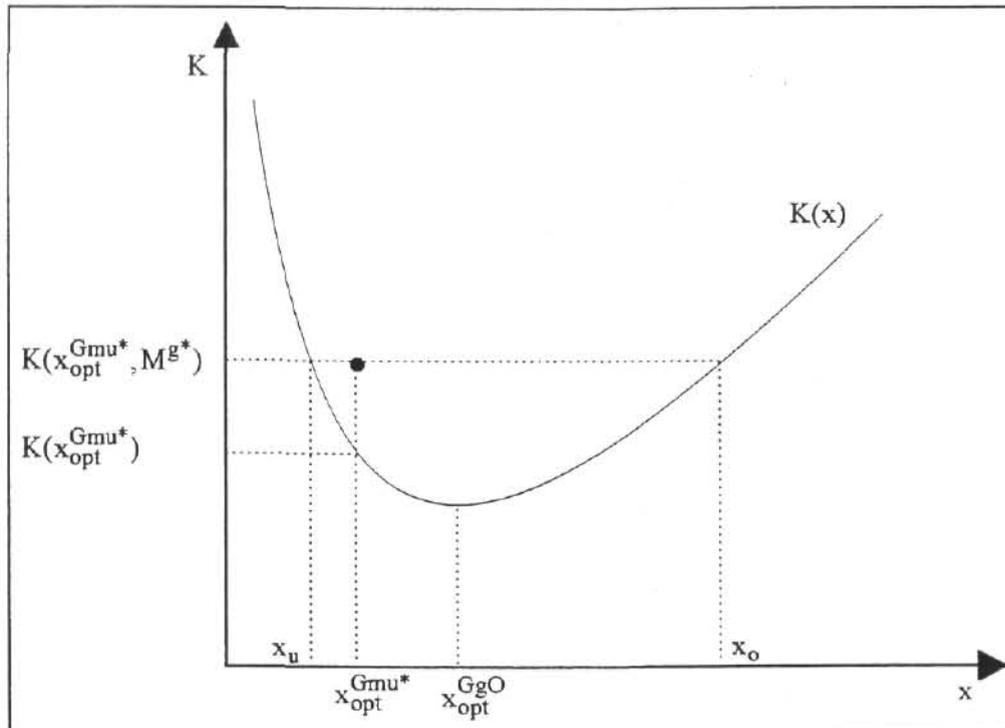


Abbildung 7: Verlauf der Funktion $K(x)$ bei Berücksichtigung stufenbezogener Transporthäufigkeiten

Der Abbildung 7 ist zu entnehmen, daß bedingt durch die Konvexitätseigenschaften der Funktion der entscheidungsrelevanten Kosten für Ausprägungen der Fertigungslosgröße bis zum Erreichen des globalen Kostenminimums fallende Kosten gemäß G-30 zu verzeichnen sind, während für Losgrößenwerte nach dem Überschreiten des globalen Optimums steigende Kosten $K(x)$ auftreten. Aus dem konvexen Verlauf der kontinuierlichen Kostenfunktion für x folgt, daß außerhalb des globalen Kostenminimums immer zwei Werte der Fertigungslosgröße existieren, die zu den gleichen Kosten führen. In Abbildung 7 ist dieser Sachverhalt für die mit x_u und x_o bezeichneten Ausprägungen illustriert. Wird nun Ganzzahligkeit für jedes Element des Vektors M gefordert, dann stellen die kontinuierlichen Kosten der Gleichung G-30 eine nicht zu unterschreitende untere Schranke für Losgrößen zu ganzzahligen Vektoren M dar. Die Abbildung 7 zeigt dies für die Fertigungslosgröße der heuristischen Lösung.

In Zusammenfassung der Betrachtungen des letzten Abschnitts kann festgestellt werden, daß die im Rahmen der Heuristik verfolgte Vorgehensweise garantiert, daß es unterhalb der Losgröße der heuristischen Abschlußlösung keine Ausprägungen von x zu ganzzahligen Vektoren M gibt, die geringere Gesamtkosten verursachen. Im Hinblick auf die Ermittlung der optimalen Lösung des Planungsproblems folgt hieraus, daß bis zu dem der heuristischen Lösung entsprechenden Losgrößenwert die Höhe der kontinuierlichen Kosten $K(x)$ für die Lösungsfindung keine Bedeutung hat. Die Fertigungslosgröße der heuristischen Abschlußlösung repräsentiert demzufolge die untere Schranke des relevanten Lösungsraumes für mögliche kostenverbessernde Lösgrößen zu ganzzahligen Vektoren M .

Um für den relevanten Lösungsraum eine feste obere Schranke zu etablieren, wäre diejenige Losgröße zu bestimmen, welche oberhalb der Fertigungslosgröße der heuristischen Lösung die gleichen kontinuierlichen Kosten erbringt, wie die Abschlußlösung der Heuristik (vgl. x_0 in Abbildung 7). Dabei erscheint es jedoch nicht ohne weiteres möglich, die Funktion $K(x)$ hinsichtlich eines konkreten Kostenniveaus nach x aufzulösen. Zur Optimierung des Modellansatzes wird daher die nachstehend beschriebene Vorgehensweise empfohlen.

Die Suche nach kostenverbessernden Planungslösungen beginnt in der unteren Schranke des relevanten Lösungsraumes, abgebildet durch die Fertigungslosgröße der heuristischen Lösung. In Rückgriff auf den vorhergehenden Abschnitt sei nochmals angemerkt, daß ein Vektor M für ein gewisses Losgrößenintervall optimal ist. Gemäß G-21 existiert allerdings nur genau eine Ausprägung der Fertigungslosgröße, die für einen gegebenen Vektor der Transporthäufigkeiten zu minimalen Kosten führt. Des weiteren konnte in Abschnitt 2.3.1 festgestellt werden, daß ein zusätzlicher Transportvorgang zwischen zwei korrespondierenden Stufen nur dann geringere von diesen Stellen zu beeinflussende Kosten $H_s(m_s)$ erbringt, wenn die für alle Stufen geplante Fertigungslosgröße den entsprechenden Wert der Vergleichslosgröße mindestens überschreitet. Die genannten Feststellungen bedingen, daß ausgehend von der verwendeten Startlösung eine eventuelle Kostenverbesserung immer dann auftreten kann, wenn sich eine höhere Losgröße im Optimalitätsbereich eines veränderten Vektors M befindet.

Bezogen auf die Ausgangslösung kann diese Möglichkeit zuerst bei der stufenbezogenen Transporthäufigkeit auftreten, deren Vergleichslosgröße nach G-28 am nächsten oberhalb des Startwertes der Losgröße liegt, da ein Anstieg der Transporthäufigkeit m_s zu einem Anstieg der optimalen Fertigungslosgröße nach G-21 führt und die neue Losgröße im jetzt veränderten Optimalitätsbereich des Vektors M liegt bzw. liegen kann.

Folglich sind zunächst ausgehend von dem Vektor M^{E^*} der heuristischen Lösung alle stufenbezogenen Vergleichslosgrößen zu ermitteln. Aus den berechneten Ausprägungen ist die kleinste auszuwählen und die zugehörige Transporthäufigkeit um eins zu erhöhen. Für den sich ergebenden Vektor sind anschließend die optimale Fertigungslosgröße sowie die entscheidungsrelevanten Kosten zu bestimmen.

Die Gesamtkosten dieser Lösung sind jetzt mit den Kosten der heuristischen Abschlußlösung zu vergleichen. Verursacht die errechnete Planungslösung geringere Kosten, so ersetzt sie die heuristische Lösung als neue vorläufige Optimallösung. Ist dies nicht der Fall, so sind für den entsprechenden Losgrößenwert die kontinuierlichen Kosten mit G-30 zu berechnen.

Liegen diese Kosten über denen der Ausgangslösung, kann die Optimierungsprozedur, wie diskutiert, abgebrochen werden und die Optimallösung ist gefunden. Sind die kontinuierlichen Kosten dagegen geringer als die Kosten der Startlösung, so ist die anhand des Vektors M^{E^*} der heuristischen Abschlußlösung dargelegte Vorgehensweise nunmehr auf den neu ermittelten Vektor der Transporthäufigkeiten anzuwenden. Allgemein ist demzufolge die betrachtete Vorgehensweise immer ausgehend von dem zuletzt errechneten Vektor M solange fortzusetzen, bis erstmals nach einem Austauschschritt im Vektor der Transporthäufigkeiten festgestellt wird, daß die kontinuierlichen Kosten dieses Vektors größer sind als die Kosten der vorläufigen Optimallösung. In diesem Fall wäre eine „mögliche“ Kostenverringerung durch einen weiteren Austauschschritt im Vektor M erst bei einer Ausprägung x denkbar, die sich streng oberhalb des zuletzt berechneten Losgrößenwertes befindet.

Aufgrund des konvexen Verlaufes der Funktion $K(x)$ könnte diese imaginäre Kostenverbesserung erst bei einem x auftreten, dessen kontinuierliche Kosten bereits höher sind als die der zuletzt untersuchten Lösung. Da durch $K(x)$ per Definition die für eine gegebene Losgröße nicht zu unterschreitenden Kosten abgebildet werden, ist daher gewährleistet, daß es keine weiteren Fertigungslosgrößen zu ganzzahligen Vektoren M gibt, die geringere entscheidungsrelevante Kosten erbringen, als die bis dahin vorläufige Optimallösung. Sie repräsentiert damit die optimale Lösung des Planungsproblems. Nachstehend ist die zur Ermittlung der Optimallösung ausgehend von der heuristischen Abschlußlösung anzuwendende schrittweise Vorgehensweise nochmals formalisiert angegeben.

*Algorithmus zur Ermittlung der optimalen Lösung des Planungsproblems**Schritt 1:*

- Setze:
 - $\hat{x}_{\text{opt}} = x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}^*}$
 - $\hat{m}_{s,\text{opt}}^g = m_s^{g^*}$ für $s=1(1)S$
 - $\hat{K}_{\text{opt}} = K(x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}^*}, M^{g^*})$ mit: $M^{g^*} = \{m_1^{g^*}, m_2^{g^*}, \dots, m_S^{g^*}\}$
- $i = 0$
- Setze $\hat{m}_{s,i} = m_s^{g^*}$ für $s=1(1)S$.

Schritt 2:

- Bestimme $x_s^{\text{WG}}(\hat{m}_{s,i}; \hat{m}_{s,i} + 1)$ zu $\hat{m}_{s,i}$ für $s=1(1)S$ in G-28.

Schritt 3:

- Wähle $x_j^{\text{WG}}(\hat{m}_{s,i}; \hat{m}_{s,i} + 1) = \min(x_1^{\text{WG}}; x_2^{\text{WG}}; \dots; x_S^{\text{WG}})$.
- Setze:

- $\hat{m}_{s,j} = \hat{m}_{s,i}$	für $s \neq j$	}	für $s=1(1)S$.
- $\hat{m}_{s,j+1} = \hat{m}_{s,i} + 1$	für $s = j$		
- $i = i + 1$			

Schritt 4:

- Bestimme $\hat{x}_i(\hat{M}_i) = x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}}(\hat{M}_i)$ mit $\hat{M}_i = \{\hat{m}_{1,i}, \hat{m}_{2,i}, \dots, \hat{m}_{S,i}\}$ in G-21.
- Bestimme $\hat{K}_i(\hat{x}_i, \hat{M}_i)$ in G-17.

Schritt 5:

- Test: $\hat{K}_i < \hat{K}_{\text{opt}}$
 - Falls ja: Setze:
 - $\hat{x}_{\text{opt}} = \hat{x}_i$
 - $\hat{m}_{s,\text{opt}}^g = \hat{m}_{s,i}$ für $s=1(1)S$
 - $\hat{K}_{\text{opt}} = \hat{K}_i(\hat{x}_i; \hat{M}_i)$.
 - Gehe zu Schritt 2.
 - Falls nein: Bestimme $K(\hat{x}_i)$ in G-30.
 - Test: $K(\hat{x}_i) > \hat{K}_{\text{opt}}$
 - Falls ja: Gehe zu Schritt 6.
 - Falls nein: Gehe zu Schritt 2.

Schritt 6:

- Setze $x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}} = \hat{x}_{\text{opt}}$ und $m_{s,\text{opt}}^g = \hat{m}_{s,\text{opt}}^g$ für $s=1(1)S$ sowie $K_{\text{Min}} = \hat{K}_{\text{opt}}$.
- Stop

2.4 Veranschaulichung durch ein numerisches Beispiel

Im Rahmen dieses Abschnittes werden die beiden Varianten des im vorliegenden Arbeitsbericht entwickelten Modellansatzes anhand eines Zahlenbeispiels veranschaulicht. Für eine innerhalb einer mehrstufigen Serienfertigung hergestellte Produktart sollen dabei die folgenden Parameterwerte gelten:³¹

	$x_{p,s}$	$c_{L,s}$	$k_{R,s}$	$k_{T,s}$
Stufe 1	2040	0,5	10	1
Stufe 2	5000	0,5	18,3	9
Stufe 3	4000	0,04	15	5
Absatz	1000			

Tabelle 1: Parameterwerte des Zahlenbeispiels

Im Planungszeitraum, der $T = 1$ Zeiteinheit umfaßt, ist ein Bedarf an $B = x_{p,4} \cdot T = 1000 \cdot 1 = 1000$ Mengeneinheiten des Gutes zu befriedigen.

Optimale Losgrößepolitik bei einer identischen Transporthäufigkeit

Zur Ermittlung der Planungslösung ist auf den von GOYAL vorgeschlagenen iterativen Algorithmus zurückzugreifen. Hierfür sind ausgehend von $m = 1$ die entscheidungsrelevanten Kosten mit G-19 zu berechnen. Die den zu untersuchenden Transporthäufigkeiten entsprechenden Kostenwerte sind der Tabelle 2 zu entnehmen.

m	K(m)
1	268,89
2	226,82
3	220,24
4	224,20

Tabelle 2: Optimierungsrechnung bei einer identischen Transporthäufigkeit

³¹ Die Parameterwerte des numerischen Beispiels sind entnommen aus: Goyal/Szendrovits, Lot Size Model, 1986, S. 209 bzw. Szendrovits/Drezner, Multi-Stage Production, 1980, S. 628.

Die Tabelle 2 zeigt auf, daß ausgehend von der kleinsten zulässigen Transporthäufigkeit $m = 1$ vorerst die Kosten gemäß G-19 bei den jeweils nächsthöheren Ausprägungen der Transporthäufigkeit fallen. Für $m = 4$ ergibt sich erstmals ein Kostenanstieg gegenüber dem nächstkleineren Wert $m = 3$. Die letztere Ausprägung genügt damit der definierten Optimalitätsbedingung G-20 und repräsentiert folglich die optimale ganzzahlige Transportanzahl.

Die Berechnung der im Rahmen des Lösungsalgorithmus zu bestimmenden Kosten-
größen wird exemplarisch für die ganzzahlige Optimallösung verdeutlicht. Bei drei
Transporten für alle Stufenpaare ergeben sich die Kosten nach G-19 zu:

$$K(m=3) = 1000 \cdot 1 \cdot \left\{ (10 + 1 \cdot 3 + 18,3 + 9 \cdot 3 + 15 + 5 \cdot 3) \cdot \left[\frac{0,5}{5000} \cdot \frac{5000}{2040} \frac{-1}{\left(\frac{5000}{2040}\right)^3 - 1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2040} - \frac{1}{5000}\right) \cdot 0,5 \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{0,5}{5000} \cdot \frac{5000}{4000} \frac{-1}{\left(\frac{5000}{4000}\right)^3 - 1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4000} - \frac{1}{5000}\right) \cdot 0,5 \right] + \left[\frac{0,04}{4000} \cdot \frac{4000}{1000} \frac{-1}{\left(\frac{4000}{1000}\right)^3 - 1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{4000}\right) \cdot 0,04 \right] \right\}$$

$$K(m=3) = \underline{\underline{220,24}}$$

Bei einer Transportanzahl von $m = 3$ resultiert anhand von G-18 eine kostenmini-
mierende Fertigungslosgröße von:

$$x_{\text{opt}}^{\text{Gm}}(m=3) = \left\{ (10 + 1 \cdot 3 + 18,3 + 9 \cdot 3 + 15 + 5 \cdot 3) \cdot \left[\frac{0,5}{5000} \cdot \frac{5000}{2040} \frac{-1}{\left(\frac{5000}{2040}\right)^3 - 1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2040} - \frac{1}{5000}\right) \cdot 0,5 \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{0,5}{5000} \cdot \frac{5000}{4000} \frac{-1}{\left(\frac{5000}{4000}\right)^3 - 1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4000} - \frac{1}{5000}\right) \cdot 0,5 \right] + \left[\frac{0,04}{4000} \cdot \frac{4000}{1000} \frac{-1}{\left(\frac{4000}{1000}\right)^3 - 1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{4000}\right) \cdot 0,04 \right] \right\}$$

$$x_{\text{opt}}^{\text{Gm}}(m=3) = \underline{\underline{801,87}}$$

Um die jeweils drei Transportlosgrößen bestimmen zu können, ist es zunächst not-
wendig die relevanten Größen der kleinsten Transportlose mit G-13 zu berechnen.

$$q_{\text{Min}}^1 = 801,87 \cdot \frac{5000}{\left(\frac{5000}{2040}\right)^3 - 1} = \underline{\underline{84,78}}$$

$$q_{\text{Min}}^2 = 801,87 \cdot \frac{5000}{\left(\frac{5000}{4000}\right)^3 - 1} = \underline{\underline{210,33}}$$

$$q_{\text{Min}}^3 = 801,87 \cdot \frac{\frac{4000}{1000} - 1}{\left(\frac{4000}{1000}\right)^3 - 1} = \underline{\underline{38,18}}$$

Ausgehend von diesen Werten leiten sich die korrespondierenden zwei weiteren Transportlosgrößen gemäß G-12 ab, indem bis $m = 3$ die Ausprägung des jeweils nächstkleineren Transportloses mit dem zugehörigen Quotienten aus maximaler und minimaler Produktionsgeschwindigkeit multipliziert wird. Im Hinblick auf die konkrete Reihenfolge der Beförderung der einzelnen Transportlose ist zu beachten, daß das Lager zwischen Stufe eins und zwei ein Zerreißlager darstellt und daher die berechnete kleinste Transportlosgröße das letzte Transportlos einer fallenden geometrischen Reihe repräsentiert. Die Aufteilung des gesamten Fertigungsloses auf die drei Transportlose in bezug auf die drei relevanten Transportlosreihenfolgen verdeutlicht die Tabelle 3.

s	q_1^s	q_2^s	q_3^s
1	509,29	207,79	84,78
2	210,33	262,91	328,63
3	38,18	152,74	610,95

Tabelle 3: Transportlosgrößen des numerischen Beispiels bei einer identischen Transporthäufigkeit³²

Optimale Losgrößenpolitik bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten³³

- Ermittlung einer heuristischen Lösung

Schritt 1: Initiierung der Lösungssuche

Es gilt: $- i = 1$

$- m_{s,1}^* = 1$ für $s=1(1)3$

³² Die Summe der Transportlosgrößen der ersten Transportlosreihenfolge ergibt einen um 0,01 geringeren Wert als die weiterzuleitende Fertigungslosgröße. Diese Differenz wird verursacht durch die Rundung der Rechenergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

³³ Im folgenden werden die Rechenergebnisse ebenfalls auf zwei Nachkommastellen gerundet. Wird ein bereits ermittelter Wert in einer nachfolgenden Berechnung nochmals verwendet, dann wird aus Gründen der Übersichtlichkeit das auf zwei Nachkommastellen gerundete Ergebnis angegeben. Der konkreten Berechnung liegen allerdings die numerisch exakten Werte zugrunde.

Schritt 2: Bestimmung der optimalen Fertigungslosgröße für den Startvektor der Transporthäufigkeiten³⁴

$$x_1^* = x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}}(1;1;1) = \frac{(10+1 \cdot 1+18,3+9 \cdot 1+15+5 \cdot 1)}{\sqrt{\left[\left[\frac{0,5 \cdot 1}{5000} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2040} - \frac{1}{5000} \right) \cdot 0,5 \right] + \left[\frac{0,5 \cdot 1}{5000} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4000} - \frac{1}{5000} \right) \cdot 0,5 \right] + \left[\frac{0,04 \cdot 1}{4000} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{4000} \right) \cdot 0,04 \right] \right]} = \underline{\underline{433,63}}$$

Schritt 3:

Ermittlung der optimalen stufenbezogenen Transporthäufigkeiten gemäß G-22 unter Verwendung der Gleichungen G-23 und G-24 für den berechneten Losgrößenwert

$$Y_1 = 2 + \frac{\left(\frac{5000}{2040} - 1 \right) \cdot \ln \left(\frac{5000}{2040} \right) \cdot 0,5 \cdot (433,63)^2}{1 \cdot 5000} = \underline{\underline{26,46}} \quad Z_1^+ = \frac{26,46}{2} + \sqrt{\left(\frac{26,46}{2} \right)^2 - 1} = \underline{\underline{26,42}}$$

$$m_{1,1,\text{opt}}^{\text{G}}(x_1^*) = \frac{\ln(26,42)}{\ln \left(\frac{5000}{2040} \right)} = \underline{\underline{3,65}}$$

Entsprechend der obigen Berechnungsweise ergeben sich die optimalen reellwertigen Transporthäufigkeiten für das zweite und dritte Stufenpaar zu:

$$m_{2,1,\text{opt}}^{\text{G}}(x_1^*) = \underline{\underline{1,52}} \quad m_{3,1,\text{opt}}^{\text{G}}(x_1^*) = \underline{\underline{0,85}}$$

Bestimmung der optimalen ganzzahligen stufenbezogenen Transporthäufigkeiten

$$m_{1,1,\text{opt}}^{\text{G}}(x_1^*) = 3,65 \geq \left[m_{1,1,\text{opt}}^{\text{G}}(x_1^*) = 3,65 \right] + 0,5 \Rightarrow \hat{m}_{1,1} = 4$$

$$m_{2,1,\text{opt}}^{\text{G}}(x_1^*) = 1,52 \geq \left[m_{2,1,\text{opt}}^{\text{G}}(x_1^*) = 1,52 \right] + 0,5 \Rightarrow \hat{m}_{2,1} = 2$$

$$m_{3,1,\text{opt}}^{\text{G}}(x_1^*) = 0,85 < 1 \Rightarrow \hat{m}_{3,1} = 1$$

Schritt 4: Vergleich des Ausgangsvektors der Transporthäufigkeiten mit dem ermittelten Vektor

$$m_{1,1}^* = 1 \neq \hat{m}_{1,1} = 4 \quad m_{2,1}^* = 1 \neq \hat{m}_{2,1} = 2 \quad m_{3,1}^* = 1 = \hat{m}_{3,1} = 1$$

34 Für $m_{1,1}^* = m_{2,1}^* = m_{3,1}^* = 1$ ergeben sich die einzelnen stufenbezogenen Ausdrücke $A_s(q_{\text{Min}}^s, m_{s,1}^*)$ [G-13] in G-18 jeweils zu eins. Dieser Sachverhalt ist in der angegebenen Berechnung bereits berücksichtigt.

Es zeigt sich, daß die korrespondierenden stufenbezogenen Transporthäufigkeiten nicht für jedes Stufenpaar eine Übereinstimmung aufweisen. Somit ist zu konstatieren, daß der Startwert der Fertigungslosgröße bereits im Optimalitätsbereich des neu ermittelten Vektors der Transporthäufigkeiten liegt und folglich dieser Vektor für die Ausgangslosgröße die geringsten erreichbaren Gesamtkosten erbringt.

Damit ist eine weitere Iteration beginnend mit Schritt 2 notwendig und es gilt:

$$m_{1,2}^* = \hat{m}_{1,1} = 4 \quad m_{2,2}^* = \hat{m}_{2,1} = 2 \quad m_{3,2}^* = \hat{m}_{3,1} = 1 \quad \text{SOWIE } i = i+1 = 1+1 = 2$$

Die Ergebnisse der zweiten Iteration sind der Tabelle 4 zu entnehmen.

$x_2^* = 665,71$				
s	$m_{s,2,\text{opt}}^G(x_2^*)$	x_s^{WG}	$\hat{m}_{s,2}$	$m_{s,2}^*$
1	4,56	—	5	4
2	2,32	702,92	2	2
3	1,23	790,57	1	1

Tabelle 4: Ergebnisse der zweiten Iteration der Heuristik bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten

Die in der Tabelle 4 aufgeführten optimalen reellwertigen stufenbezogenen Transporthäufigkeiten verdeutlichen, daß im Gegensatz zur ersten Iteration nunmehr für das zweite und dritte Stufenpaar die entsprechenden Vergleichslosgrößenwerte nach G-28 zur Bestimmung der optimalen ganzzahligen Transportanzahl berechnet werden müssen. Exemplarisch wird die anzuwendende Vorgehensweise der Berechnung für das zweite Stufenpaar gezeigt.

Die $m_{2,2,\text{opt}}^G(x_2^*) = 2,32$ direkt benachbarten ganzzahligen Transporthäufigkeiten sind 2 und 3. Mit diesen beiden Werten ergibt sich die entsprechende stufenbezogene Vergleichslosgröße anhand von G-28 zu:

$$x_2^{\text{WG}(2;3)} = \sqrt{\frac{9 \cdot 5000}{0,5 \cdot (1,25 - 1) \cdot \left[\frac{1}{(1,25)^2 - 1} - \frac{1}{(1,25)^3 - 1} \right]}} = \underline{\underline{702,92}}$$

Zur Ermittlung der ganzzahlig optimalen Transportanzahl ist jetzt der berechnete Vergleichslosgrößenwert x_2^* gegenüberzustellen. Hierbei ergibt sich:

$$x_2^* = 665,71 < x_2^{\text{WG}(2;3)} = 702,92 \Rightarrow \hat{m}_{2,2} = 2$$

Da durch die für alle drei Stufenpaare geplante Fertigungslosgröße der errechnete Wert der Vergleichslosgröße noch nicht überschritten wurde, sind bezüglich des zweiten Stufenpaares weiterhin zwei Transporte kostenminimierend. Der für das zweite Stufenpaar dargestellten Vorgehensweise folgend kann in analoger Weise die ganzzahlig optimale Transporthäufigkeit für das dritte Stufenpaar bestimmt werden.

Anhand der in Tabelle 4 angegebenen Ergebnisse erbringt der Vergleich des Ausgangsvektors der Transporthäufigkeiten dieses Iterationsschrittes mit dem ermittelten Vektor das folgende Resultat:

$$m_{1,2}^* = 4 \neq \hat{m}_{1,2} = 5 \quad m_{2,2}^* = 2 = \hat{m}_{2,2} = 2 \quad m_{3,2}^* = 1 = \hat{m}_{3,2} = 1$$

Da für das erste Stufenpaar die korrespondierenden Transporthäufigkeiten keine Identität aufweisen, ist nochmals eine Iteration erforderlich. Hierfür gilt:

$$m_{1,3}^* = \hat{m}_{1,2} = 5 \quad m_{2,3}^* = \hat{m}_{2,2} = 2 \quad m_{3,3}^* = \hat{m}_{3,2} = 1 \text{ sowie } i = i+1 = 2+1 = 3$$

Die Ergebnisse der dritten Iteration gibt die Tabelle 5 wieder.

$x_3 = 675,73$				
s	$m_{s,3,\text{opt}}^G(x_3)$	x_s^{WG}	$\hat{m}_{s,3}$	$m_{s,3}^*$
1	4,59	—	5	5
2	2,36	702,92	2	2
3	1,25	790,57	1	1

Tabelle 5: Ergebnisse der dritten Iteration der Heuristik bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten

Anhand der in Tabelle 5 angeführten Resultate kann festgestellt werden, daß nach der dritten Iteration für alle drei Stufenpaare gilt: $m_{s,3}^* = \hat{m}_{s,3}$. Demzufolge verursacht für die mit diesem Vektor der Transporthäufigkeiten kalkulierte Fertigungslosgröße kein anderer Vektor geringere entscheidungsrelevante Kosten. Die entsprechenden Ausprägungen der Entscheidungsvariablen repräsentierten folglich die heuristische Lösung. Damit kann die Heuristik beendet werden, indem zu Schritt 5 gegangen wird.

Schritt 5: Definition der heuristischen Lösung und Berechnung der entscheidungsrelevanten Kosten gemäß G-17

$$m_1^{g*} = 5 \quad m_2^{g*} = 2 \quad m_3^{g*} = 1 \quad x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}^*} = 675,26$$

$$K(x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}^*}, M^{g*}) = \left[\frac{675,26 \cdot 0,5}{5000} \cdot \frac{5000}{\left(\frac{5000}{2040}\right)^5 - 1} \cdot 1000 + \frac{675,26}{2} \cdot \left(\frac{1}{2040} - \frac{1}{5000}\right) \cdot 0,5 \cdot 1000 \right] +$$

$$+ \left[\frac{675,26 \cdot 0,5}{5000} \cdot \frac{5000}{\left(\frac{5000}{4000}\right)^2 - 1} \cdot 1000 + \frac{675,26}{2} \cdot \left(\frac{1}{4000} - \frac{1}{5000}\right) \cdot 0,5 \cdot 1000 \right] +$$

$$+ \left[\frac{675,26 \cdot 0,04}{4000} \cdot \frac{4000}{\left(\frac{4000}{1000}\right)^1 - 1} \cdot 1000 + \frac{675,26}{2} \cdot \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{4000}\right) \cdot 0,04 \cdot 1000 \right] +$$

$$+ (10 + 1 \cdot 5 + 18,3 + 9 \cdot 2 + 15 + 5 \cdot 1) \cdot \frac{1000}{675,26}$$

$$K(x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}^*}, M^{g*}) = \underline{\underline{211,03}}$$

Wenn die im Rahmen der Heuristik innerhalb der ersten und zweiten Iteration betrachteten Vektoren der Transporthäufigkeiten als Planungsparameter angesehen werden, dann ist es möglich, für die drei relevanten Vektoren jeweils eine Gesamtkostenfunktion nach G-17 zu bestimmen. In grafischer Form zeigt die Abbildung 8 (Abbildung 9) die Kostenfunktionsverläufe für die zwei Vektoren der Transporthäufigkeiten der ersten (zweiten) Iteration, wobei als separate Fertigungslosgrößenwerte die mit dem entsprechenden Vektor korrespondierenden optimalen Losgrößen in den beiden Diagrammen gekennzeichnet sind.

Die zwei Diagramme illustrieren noch einmal in grafischer Form die Arbeitsweise der Heuristik, wie sie theoretisch bereits in Abschnitt 2.3.1 diskutiert wurde (vgl. dazu auch Abbildung 5). Aus den Abbildungen 8 und 9 ist zu entnehmen, daß sowohl für die in der ersten wie auch in der zweiten Iteration analysierte Fertigungslosgröße gilt, daß ein anderer als der zur Kalkulation verwendete Vektor der Transporthäufigkeiten die geringsten für diesen Losgrößenwert erreichbaren entscheidungsrelevanten Kosten verursacht. Hierbei wird deutlich, daß für den jeweils neu ermittelten Vektor der Transporthäufigkeiten allerdings die ihm entsprechende optimale Fertigungslosgröße eine weitere Verringerung der Gesamtkosten ermöglicht.

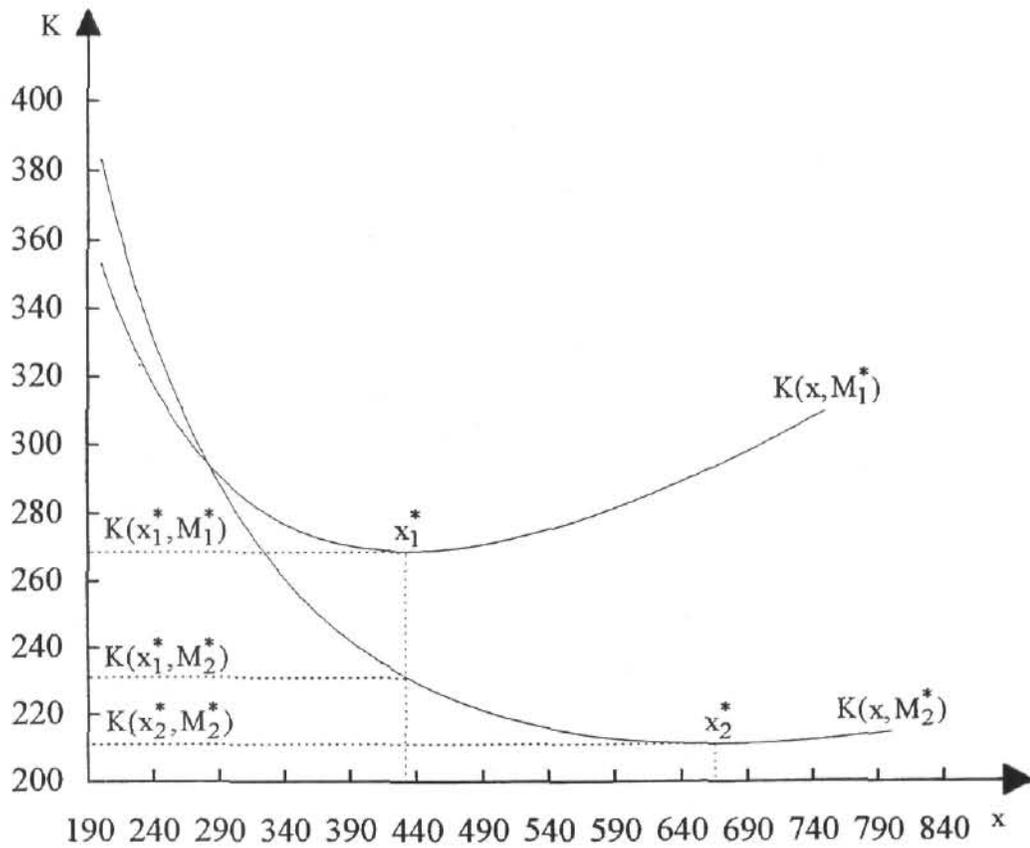


Abbildung 8: Kostenfunktionsverläufe der ersten Iteration der Heuristik bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten

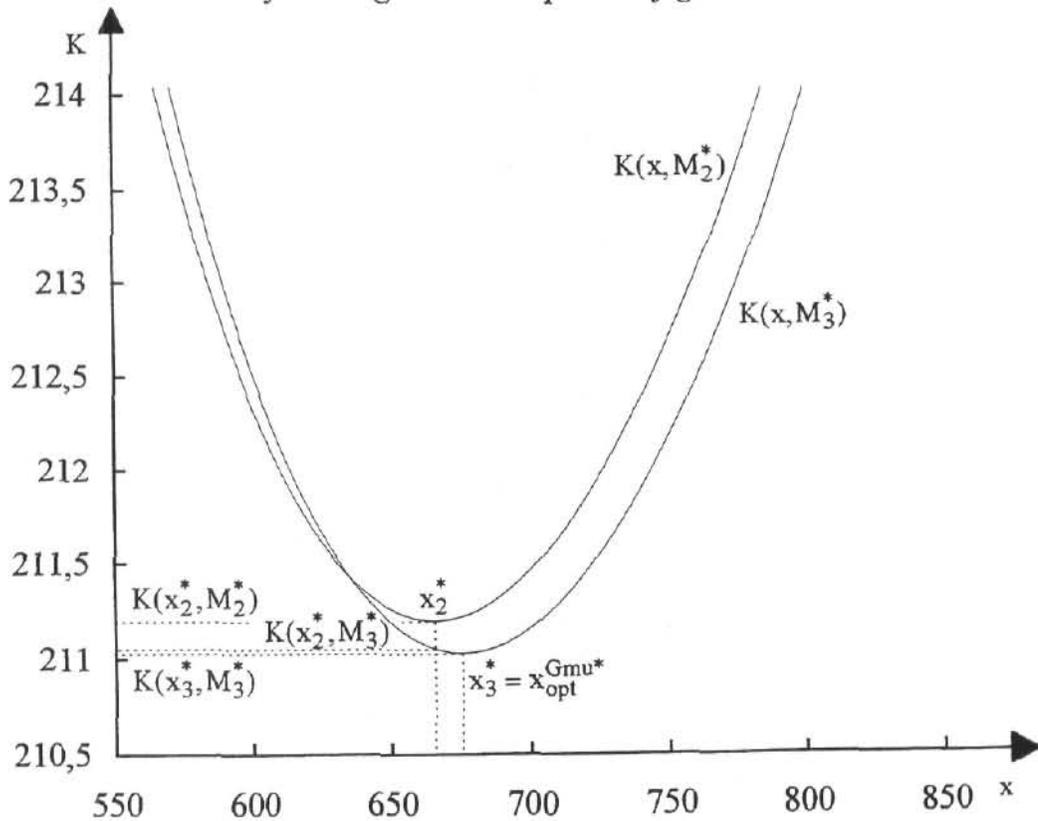


Abbildung 9: Kostenfunktionsverläufe der zweiten Iteration der Heuristik bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten

- *Ermittlung der Optimallösung*

Schritt 1:

Definition der vorläufigen Optimallösung

$$\hat{x}_{\text{opt}} = x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}^*} = 675,26 \quad \hat{m}_{1,\text{opt}}^{\text{g}} = m_1^{\text{g}^*} = 5 \quad \hat{m}_{2,\text{opt}}^{\text{g}} = m_2^{\text{g}^*} = 2 \quad \hat{m}_{3,\text{opt}}^{\text{g}} = m_3^{\text{g}^*} = 1$$

$$\hat{K}_{\text{opt}} = K(x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}^*}, M^{\text{g}^*}) = \underline{\underline{211,03}}$$

Initiierung der Suche nach kostenverbessernden Lösungen

Es gilt: $i = 0 \quad \hat{m}_{1,0} = m_1^{\text{g}^*} = 5 \quad \hat{m}_{2,0} = m_2^{\text{g}^*} = 2 \quad \hat{m}_{3,0} = m_3^{\text{g}^*} = 1$

Schritt 2: *Bestimmung der stufenbezogenen Vergleichslosgrößen auf Basis des Vektors $M^{\text{g}^*} = \{5,2,1\}$ mit G-28*

In bezug auf das erste Stufenpaar ist als Vergleichslosgröße der Wert zu bestimmen, bei dem für diese beiden aufeinanderfolgenden Stufen 5 und 6 Transporte hinsichtlich der durch die jeweilige Transporthäufigkeit beeinflussbaren entscheidungsrelevanten Kosten (G-25) gleichwertig sind. Entsprechend der bereits im Rahmen der Heuristik dargestellten Berechnungsweise ergibt sich der gesuchte Wert zu:

$$x_1^{\text{WG}}(5,6) = 1006,67$$

Für das zweite und dritte Stufenpaar sind die relevanten Vergleichslosgrößen mit den in der Tabelle 5 angegebenen Werte identisch. Sie lauteten:

$$x_2^{\text{WG}}(2,3) = 702,92 \quad x_3^{\text{WG}}(1,2) = 790,57$$

Schritt 3: *Auswahl der zu erhöhenden Transporthäufigkeit*

$$\min[x_1^{\text{WG}}(5,6); x_2^{\text{WG}}(2,3); x_3^{\text{WG}}(1,2)] = \min[1006,67; 702,92; 790,57] = 702,92 = x_2^{\text{WG}}(2,3)$$

Damit resultieren als zu analysierende Ausprägungen der Transporthäufigkeiten:

$$\hat{m}_{1,1} = 5 \quad \hat{m}_{2,1} = 3 \quad \hat{m}_{3,1} = 1 \quad \text{Es gilt: } i = i+1 = 0+1 = 1$$

Schritt 4: *Berechnung der optimalen Fertigungslosgröße für den definierten Vektor der Transporthäufigkeiten mit G-21 und Ermittlung der entscheidungsrelevanten Kosten gemäß G-17*

$$\hat{x}_1 = x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}}(5;3,1) = 762,99 \quad \hat{K}_1(\hat{x}_1, \hat{M}_1) = 210,49$$

Schritt 5: Kostenvergleich mit der vorläufigen Optimallösung

$$\hat{K}_1 = 210,49 < \hat{K}_{\text{opt}} = 211,03$$

Anhand des Kostenvergleiches wird deutlich, daß die Abschlußlösung der Heuristik ein Suboptimum der entscheidungsrelevanten Kosten kennzeichnet. Daher ist sie durch die soeben berechnete Lösung als vorläufige Optimallösung zu ersetzen. Demzufolge gilt:

$$\hat{x}_{\text{opt}} = 762,99 \quad \hat{m}_{1,\text{opt}} = 5 \quad \hat{m}_{2,\text{opt}} = 3 \quad \hat{m}_{3,\text{opt}} = 1 \quad \hat{K}_{\text{opt}} = 210,49$$

Da sich im vorliegenden Fall eine Berechnung der Kosten $K(\hat{x}_1)$ als nicht notwendig erweist, ist zu Schritt 2 zurückzukehren.

Die Ergebnisse der zweiten Iteration sind in der Tabelle 6 enthalten.

s	x_s^{WG}	$\min(x_s^{\text{WG}})$	$\hat{m}_{s,2}$
1	1006,67	–	5
2	1006,43	–	3
3	790,57	790,57	2
\hat{x}_2	$\hat{K}(\hat{x}_2, \hat{M}_2)$	$K(\hat{x}_2)$	
810,23	210,56	209,17	

Tabelle 6: Ergebnisse der zweiten Iteration der Optimierungsprozedur bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten

Es zeigt sich, daß die entscheidungsrelevanten Kosten bezüglich des in der zweiten Iteration bestimmten Vektors der Transporthäufigkeiten in Verbindung mit der korrespondierenden optimalen Fertigungslosgröße höher sind als die der vorläufigen Optimallösung ($\hat{K}_{\text{opt}} = 210,49$). Somit ist es erforderlich, die zugehörigen Kosten $K(\hat{x}_2)$ zu kalkulieren. Um diese Kostengröße berechnen zu können, sind zunächst die stufenbezogenen Ausdrücke z_s^+ mit G-24 unter Nutzung von G-23 zu ermitteln.

$$Y_1 = 2 + \frac{\left(\frac{5000}{2040} - 1\right) \cdot \ln\left(\frac{5000}{2040}\right) \cdot 0,5 \cdot (810,23)^2}{1 \cdot 5000} = \underline{\underline{87,39}} \quad z_1^+ = \frac{87,39}{2} + \sqrt{\left(\frac{87,39}{2}\right)^2 - 1} = \underline{\underline{87,38}}$$

Entsprechend dieser Berechnungsweise lauten die Werte für z_2^+ und z_3^+ :

$$z_2^+ = 1,87 \quad z_3^+ = 7,32$$

Unter Verwendung von z_1^+ , z_2^+ und z_3^+ lassen sich die kontinuierlichen Kosten $K(x)$ für $\hat{x}_2 = 810,23$ nach G-30 wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} \hat{K}(\hat{x}_2) = & \left[\frac{810,23 \cdot 0,5}{5000} \cdot \frac{5000}{2040} - 1 \cdot \frac{\ln(87,38) / \ln\left(\frac{5000}{2040}\right)}{\left(\frac{5000}{2040}\right)} - 1 \right] \cdot 1000 + \frac{810,23}{2} \cdot \left(\frac{1}{2040} - \frac{1}{5000} \right) \cdot 0,5 \cdot 1000 + \\ & + \left[\frac{810,23 \cdot 0,5}{5000} \cdot \frac{5000}{4000} - 1 \cdot \frac{\ln(1,87) / \ln\left(\frac{5000}{4000}\right)}{\left(\frac{5000}{4000}\right)} - 1 \right] \cdot 1000 + \frac{810,23}{2} \cdot \left(\frac{1}{4000} - \frac{1}{5000} \right) \cdot 0,5 \cdot 1000 + \\ & + \left[\frac{810,23 \cdot 0,04}{4000} \cdot \frac{4000}{1000} - 1 \cdot \frac{\ln(7,32) / \ln\left(\frac{4000}{1000}\right)}{\left(\frac{4000}{1000}\right)} - 1 \right] \cdot 1000 + \frac{810,23}{2} \cdot \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{4000} \right) \cdot 0,04 \cdot 1000 + \\ & + \left(10 + 1 \cdot \frac{\ln(87,38)}{\ln\left(\frac{5000}{2040}\right)} + 18,3 + 9 \cdot \frac{\ln(1,87)}{\ln\left(\frac{5000}{4000}\right)} + 15 + 5 \cdot \frac{\ln(7,32)}{\ln\left(\frac{4000}{1000}\right)} \right) \cdot \frac{1000}{810,23} \end{aligned}$$

$$K(\hat{x}_2) = \underline{\underline{209,17}}$$

Weil dieser Kostenwert unter den Kosten der vorläufigen Optimallösung liegt ($K(\hat{x}_2) = 209,17 < \hat{K}_{\text{opt}} = 210,49$), kann nicht ausgeschlossen werden, daß in Richtung höherer Werte der Fertigungslosgröße kostengünstigere Lösungen zu ganzzahligen Vektoren der Transporthäufigkeiten existieren.

Demzufolge ist eine weitere von Schritt 2 ausgehende Iteration notwendig. Die Ergebnisse der dritten Iteration sind der Tabelle 7 zu entnehmen.

s	x_s^{WG}	$\min(x_s^{WG})$	$\hat{m}_{s,3}$
1	1006,67	—	5
2	1006,43	1006,43	4
3	1811,42	—	2
\hat{x}_3	$K(\hat{x}_3, \hat{M}_3)$	$K(\hat{x}_3)$	
882,61	213,68	210,48	

Tabelle 7: Ergebnisse der dritten Iteration der Optimierungsprozedur bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten

Die in der Tabelle 7 angeführten Resultate verdeutlichen, daß die entscheidungsrelevanten Kosten des in dieser Iteration analysierten Fertigungslosgrößenwertes in Verbindung mit dem zur Kalkulation verwendeten Vektor der Transporthäufigkeiten über den entsprechenden Kosten der vorläufigen Optimallösung liegen. Da allerdings die kontinuierlichen Kosten nach G-30 für diese Losgröße unter den Kosten der vorläufigen Optimallösung aufzufinden sind ($K(\hat{x}_3) = 210,48 < \hat{K}_{opt} = 210,49$), kann die Existenz kostenverbessernder Lösungen zu ganzzahligen Vektoren der Transporthäufigkeiten in Richtung höherer Ausprägungen der Fertigungslosgröße nicht ausgeschlossen werden. Daher ist nochmals eine in Schritt 2 beginnende Iteration durchzuführen, deren Ergebnisse in der Tabelle 8 enthalten sind.

s	x_s^{WG}	$\min(x_s^{WG})$	$\hat{m}_{s,4}$
1	1006,67	1006,67	6
2	1320,74	—	4
3	1811,42	—	2
\hat{x}_4	$K(\hat{x}_4, \hat{M}_4)$	$K(\hat{x}_4)$	
890,92	213,94	210,68	

Tabelle 8: Ergebnisse der vierten Iteration der Optimierungsprozedur bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten

Es zeigt sich, daß nach der in dieser Iteration erfolgten Erhöhung der Transportanzahl des ersten Stufenpaares konstatiert werden kann, daß für die untersuchte Lösung sowohl die entscheidungsrelevanten Kosten bezüglich des ganzzahligen Vektors der Transporthäufigkeiten, wie auch die relevanten kontinuierlichen Kosten höher sind als die Kosten der vorläufigen Optimallösung ($K(\hat{x}_4) = 210,68 > K_{\text{opt}} = 210,49$). Somit kann nunmehr ausgeschlossen werden, daß bei höheren Werten der Fertigungslosgröße kostengünstigere Lösungen zu ganzzahligen Vektoren der Transporthäufigkeiten auftreten können. Demzufolge kennzeichnet die bisherige vorläufige Optimallösung die tatsächlich optimale Lösung. Damit ist die Lösungssuche beendet, und es ist zu Schritt 6 zu gehen.

Schritt 6: Definition der Optimallösung des Planungsproblems

$$x_{\text{opt}}^{\text{Gmu}} = 762,99 \quad m_{1,\text{opt}}^g = 5 \quad m_{2,\text{opt}}^g = 3 \quad m_{3,\text{opt}}^g = 1 \quad K_{\text{Min}} = 210,49$$

Grafisch veranschaulicht die Abbildung 10 noch einmal die Vorgehensweise der Lösungsfindung im Rahmen der Optimierungsprozedur.

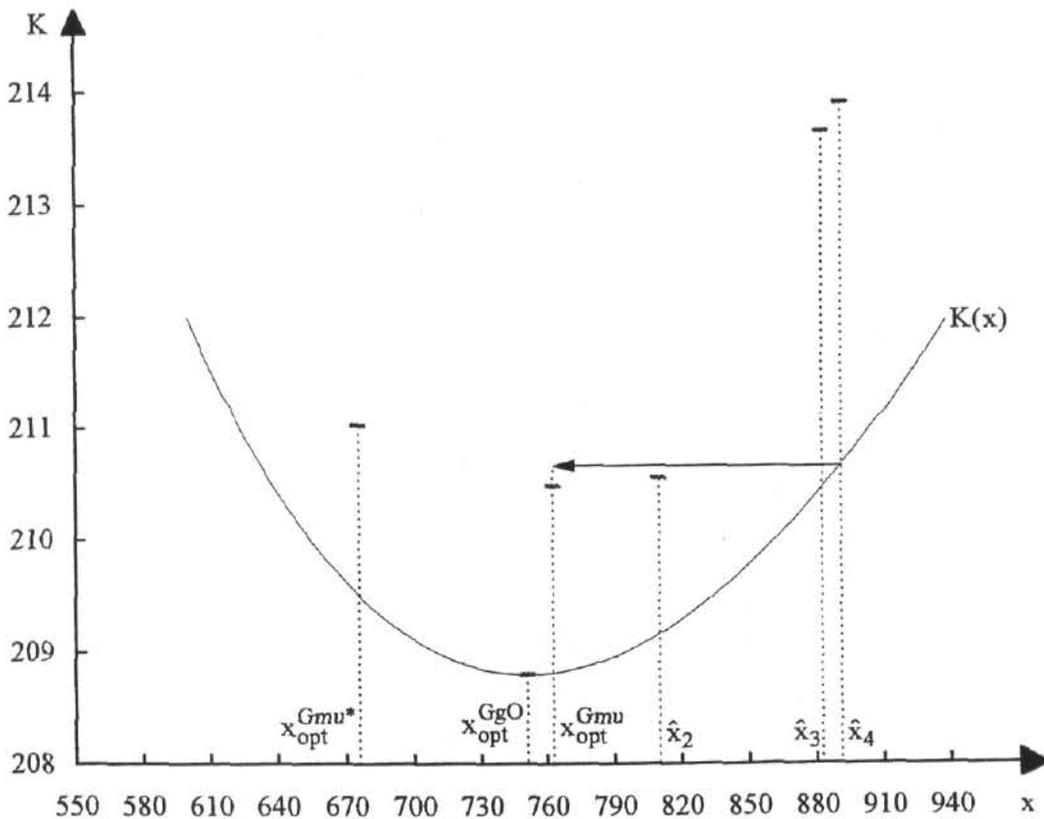


Abbildung 10: Lösungsfindung im Rahmen der Optimierungsprozedur bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten

In der Abbildung 10 wurde anhand der gegebenen Planungsparameter der für die Optimierungsprozedur relevante Abschnitt der kontinuierlichen Kostenfunktion für

x dargestellt. Als diskrete Datenpunkte sind ausgehend von der Fertigungslosgröße der heuristischen Lösung alle innerhalb der Optimierungsprozedur ermittelten Losgrößenwerte sowie die Ausprägung der Fertigungslosgröße im globalen Kostenminimum hervorgehoben.³⁵ Die Abbildung 10 illustriert zunächst nochmals in grafischer Form, daß durch die kontinuierlichen Kosten $K(x)$ für einen gegebenen Wert der Fertigungslosgröße eine nicht zu unterschreitende untere Schranke der erzielbaren minimalen entscheidungsrelevanten Kosten im Vergleich zu den erreichbaren Kosten hinsichtlich des mit diesem Losgrößenwert korrespondierenden ganzzahligen Vektors der Transporthäufigkeiten abgebildet wird. Der eingezeichnete Pfeil in Abbildung 10 macht deutlich, daß die kontinuierlichen Kosten der im Rahmen der Optimierungsprozedur zuletzt betrachteten Ausprägung der Fertigungslosgröße bereits über den Gesamtkosten der bis dahin vorläufigen Optimallösung liegen. Es ist hierbei ersichtlich, daß aufgrund des konvexen Verlaufes der Funktion $K(x)$ ausgeschlossen werden kann, daß oberhalb der zuletzt analysierten Losgröße weitere Fertigungslosgrößen zu einem ganzzahligen Vektor der Transporthäufigkeiten existieren, die geringere Gesamtkosten verursachen können.

Für die berechnete Planungslösung ergeben sich die Größen des jeweils kleinsten Transportloses der drei Transportlosreihenfolgen entsprechend der bei Betrachtung einer identischen Transporthäufigkeit vorgestellten Berechnungsweise gemäß G-13 zu:

$$q_{\text{Min}}^1 = 12,66$$

$$q_{\text{Min}}^2 = 200,13$$

$$q_{\text{Min}}^3 = 762,99$$

Ausgehend von diesen Werten bestimmen sich für die erste bzw. zweite Transportlosreihenfolge die 4 bzw. 2 weiteren Transportlosgrößen entsprechend G-12, wobei in Analogie zur Bestimmung der optimalen Losgrößenpolitik bei einer identischen Transporthäufigkeit zu beachten ist, daß das Lager zwischen Stufen eins und zwei ein Zerreißlager ist. Unter Berücksichtigung der konkreten Reihenfolge der Transportweitergabe teilt sich damit das gesamte Fertigungslos auf die in der Tabelle 9 angegebenen Transportlosgrößen auf.

³⁵ Die Ausprägungen der Entscheidungsvariablen im globalen Kostenminimum lauten: $x_{\text{opt}}^{\text{GgO}} = 751,04$; $m_1^{\text{GgO}} = 4,82$; $m_2^{\text{GgO}} = 2,61$; $m_3^{\text{GgO}} = 1,35$ sowie $K(x_{\text{opt}}^{\text{GgO}}, M_{\text{opt}}^{\text{GgO}}) = 208,80$.

s	q_1^s	q_2^s	q_3^s	q_4^s	q_5^s
1	456,85	186,40	76,05	31,03	12,66
2	200,13	250,16	312,70	–	–
3	762,99	–	–	–	–

Tabelle 9: Transportlosgrößen des numerischen Beispiels bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten

Ein Kostenvergleich der beiden betrachteten Varianten des vorgestellten Modellansatzes weist bei Planung stufenbezogener Transporthäufigkeiten eine Kostenersparnis gegenüber der Planung einer identischen Transporthäufigkeit für alle Stufen aus. Sie hat eine Höhe von:

$$\frac{220,24 - 210,49}{220,24} \cdot 100 = \underline{\underline{4,43\%}}$$

Erfolgte im Gegensatz zu den vorhergehenden Ausführungen in einem Fertigungssystem bisher die Planung der Fertigungslosgröße bei stufenbezogenen Transporthäufigkeiten unter der Prämisse, daß zwischen jeweils gekoppelten Stufen nur gleich große Transportlose befördert werden können, dann ermöglicht ein von SZENDROVITS/DREZNER unter sonst vergleichbaren Annahmen entwickelter Modellansatz die Generierung der zu realisierenden Planungslösung, auf den bereits zu Beginn dieses Abschnittes verwiesen wurde.³⁶ Auf Grundlage der Parameterkonstellation dieses Beispiels lautet die Optimallösung für das Modell von SZENDROVITS/DREZNER:³⁷

$$x_{\text{opt}}^{\text{SD}} = 639,72 \quad m_{1,\text{opt}}^g = 6 \quad m_{2,\text{opt}}^g = 2 \quad m_{3,\text{opt}}^g = 1 \quad K_{\text{Min}} = 226,04$$

$$q_1^1 = q_2^1 = q_3^1 = q_4^1 = q_5^1 = q_6^1 = 106,62 \quad q_1^2 = q_2^2 = 369,86 \quad q_1^3 = 639,72$$

Es wird deutlich, daß, falls das Fertigungssystem des Beispiels die entsprechenden Freiheitsgrade aufweist, durch die Weiterleitung unterschiedlicher Transportlose zwischen den Stufen bei gleichzeitiger Planung stufenbezogener Transporthäufigkeiten eine Kostenreduktion von:

³⁶ Vgl. Szendrovits/Drezner, Multi-Stage Production, 1980, S. 623ff.

³⁷ Vgl. Szendrovits/Drezner, Multi-Stage Production, 1980, S. 628f. oder Goyal/Szendrovits, Lot Size Model, 1986, S. 209.

$$\frac{226,04 - 210,49}{226,04} \cdot 100 = \underline{\underline{6,88\%}}$$

gegenüber der Beförderung identischer Transportlose zwischen jeweils korrespondierenden Stufen entsprechend dem Ansatz von SZENDROVITS/DREZNER realisiert werden kann. Hierbei gelingt der Beweis, daß durch die Planung der Weitergabe unterschiedlicher Transportlosgrößen zwischen den einzelnen Stufenpaaren bei *gleichzeitiger Berücksichtigung stufenbezogener Transporthäufigkeiten* basierend auf dem in diesem Arbeitsbericht vorgestellten Modellansatz gegenüber der Optimallösung des Modells von SZENDROVITS/DREZNER niemals höhere entscheidungsrelevante Kosten verursacht werden.³⁸

Interessanterweise gilt für das Zahlenbeispiel ebenfalls, daß auch die Planung einer identischen Transporthäufigkeit für alle Stufenpaare bei Weiterleitung sich unterscheidender Transportlose zwischen den aufeinanderfolgenden Stufen die entscheidungsrelevanten Kosten um:

$$\frac{226,04 - 220,24}{226,04} \cdot 100 = \underline{\underline{2,57\%}}$$

im Gegensatz zur Planung identischer Transportlose unter Berücksichtigung stufenbezogener Transporthäufigkeiten vermindert.

Es ist darauf hinzuweisen, daß die durchgeführten Kostenvergleiche nur in bezug auf das analysierte Beispiel eine vollständige Aussagekraft besitzen. Welche *Kostenreduktion durch die Planung stufenbezogener Transporthäufigkeiten* bei Weitergabe unterschiedlicher Transportlose im Rahmen einer konkreten Planungssituation im Vergleich zu den beiden anderen angesprochenen Modellansätzen tatsächlich erreicht werden kann, ist jedoch von den speziellen Ausprägungen der Planungsparameter abhängig und kann daher nur unter Kenntnis der spezifischen Daten des Fertigungssystems beurteilt werden.

³⁸ Vgl. Goyal, Optimum Production Quantity, 1977, S. 869f. Nur für den Fall, daß die Planungsparameter nicht mehr als einen Transport zwischen allen relevanten Stufen zulassen, resultieren die beiden Modellansätze in den gleichen entscheidungsrelevanten Kosten.

3 Schlußbetrachtung

In der Literatur diskutierte statische Losgrößenmodelle unterscheiden bisher nahezu ausschließlich nur die Alternativen einer „offenen“ oder „geschlossenen“ Fertigung bezüglich der Weitergabe der auf einer Stufe bearbeiteten Produkteinheiten eines Fertigungsloses zu einer nachgelagerten Stelle. Im Gegensatz dazu gestatten die beiden, im vorliegenden Arbeitsbericht dargestellten Planungsansätze eine Erweiterung des Entscheidungsproblems um die Transportlosgrößenplanung. Neben der Fertigungslosgröße gilt es die Ausprägungen der Transportlose zu bestimmen, um eine Minimierung der entscheidungsrelevanten Kosten zu erreichen. Hinsichtlich der Gestaltung der einzelnen Transportlosgrößen wurde auf einen Vorschlag von GOYAL zurückgegriffen, der vorsieht, daß sie sich entsprechend einer geometrischen Reihe entwickeln. Umfangreiche Literaturrecherchen der Autoren ergaben dabei, daß vergleichbare Modellansätze, die sich in einer unkapazitierten Sichtweise mit dem Planungsproblem beschäftigen, in der Literatur bisher nicht verfügbar zu sein scheinen.

Die Ermittlung der optimalen Planungslösung ist unter der Annahme einer identischen Transporthäufigkeit für alle Fertigungsstufen mit einem vergleichsweise geringen Aufwand möglich, da der zur Lösungsfindung verwendete Algorithmus eine relativ einfache Struktur besitzt. An Komplexität gewinnt das Entscheidungsproblem, wenn die Festlegung stufenbezogener Transporthäufigkeiten zulässig ist, wodurch die entscheidungsrelevanten Kosten reduziert werden können. Die beiden hierbei zur Lösungsfindung herangezogenen Algorithmen erfordern einen zum Teil erheblichen Aufwand, der in praktischen Anwendungen unter Wirtschaftlichkeitsgesichtspunkten kritisch zu hinterfragen ist.

Die zwei vorgestellten Modellansätze können im Rahmen realer Planungssituationen zur Festlegung der Fertigungs- und Transportlosgrößen hilfreich sein. Allerdings ist explizit darauf hinzuweisen, daß die Optimallösungen der beiden Modellvarianten nur dann die optimalen Ausprägungen der Entscheidungsvariablen eines realen Planungsproblems kennzeichnen, wenn das zu betrachtende Fertigungssystem durch die formulierten Modellprämissen *hinreichend genau* abgebildet wird. Ist dies nicht der Fall, entstehen durch die Anwendung des Modells nicht notwendige, weil vermeidbare Kosten. Die Planungsansätze besitzen somit nur unter den spezifizierten Modellannahmen Gültigkeit. Hierbei ist festzustellen, daß das reale Entscheidungsproblem einer Vielzahl von zum Teil komplexen Beeinflussungsfaktoren unterliegt, die aufgrund der definierten Prämissen keine Berücksichtigung im

Rahmen der Modellierung des Planungsproblems gefunden haben. Als Hauptkritikpunkte an dem Modell sind zu nennen:

- Aufgrund der Abbildung der Entscheidungssituation durch ein *statisches Modell* weisen die Planungsansätze Schwächen im Hinblick auf die Berücksichtigung der zeitlichen Dynamik auf. Von deterministischen Schwankungen der Modellgrößen im Planungszeitraum wird damit abstrahiert. Kritisch zu hinterfragen ist hierbei, inwieweit die Voraussetzung eines im Zeitablauf identisch wiederkehrenden Produktions- und Absatzgeschehens auch in der Realität beobachtet werden kann.³⁹
- Das Modell gestattet *keine Berücksichtigung von Kapazitätsbeschränkungen*, wie z.B. bezüglich beschränkter Fertigungs- und Transportkapazitäten. Es kann dabei konstatiert werden, daß das Ergebnis eines realen Planungsproblems sehr wohl darin bestehen kann, daß die zur Verfügung stehenden Kapazitäten bei weitem nicht ausgenutzt werden. Inwiefern dieser Sachverhalt aber bereits als Prämisse der Modellformulierung gerechtfertigt erscheint, ist als problembehaftet zu bezeichnen.⁴⁰
- Im Modell werden jeweils nur für eine Produktart eines Fertigungssystems isoliert die optimale Fertigungslosgröße und die Transportlosgrößen bestimmt. Es erfolgt damit *keine explizite Betrachtung weiterer Produktarten* sowie der zwischen den Produkten existierenden Interdependenzen. Insbesondere zu nennen ist hierbei die Vernachlässigung des Lossequenzproblems. In bezug darauf kann eine isolierte Fertigungs- und Transportlosgrößenplanung zu einem nicht realisierbaren Produktionsplan führen, weil im Fertigungssystem nicht überschneidungsfreie Maschinenbelegungspläne vorliegen.⁴¹
- *Das Modell berücksichtigt keine signifikanten Rüst- und Transportzeiten*. Es läßt sich feststellen, daß der Produktion eines Fertigungsloses auf einer Stufe eines Produktionssystems stets ein Rüstvorgang vorausgeht und sich der Fertigstellung jedes Transportloses ein Transportvorgang zu der nachfolgenden

39 Ein dynamischer Modellansatz, der sich mit der aufgeworfenen Problematik auseinandersetzt, ist nach dem Kenntnisstand der Autoren in der Literatur nicht verfügbar. Weitere sich mit der Transportlosgrößenproblematik beschäftigende Quellen liegen auf dem Gebiet der Ablauf- bzw. Reihenfolgeplanung vor. Vgl. Glass/Gupta/Potts, Lot Streaming, 1994 und die dort angegebene Literatur.

40 Zur Berücksichtigung restringierter Transportkapazitäten vgl. Szendrovits, Comment, 1978, Goyal, Alternative Approach, 1978 und Goyal/Szendrovits, Lot Size Model, 1986.

41 Vgl. zu dieser Thematik Szendrovits/Truscott, Manufacturing Cycle Time, 1989.

Stufe anschließt. Allerdings können die beiden genannten Zeiten relativ klein sein, so daß sie für die Modellformulierung keine Signifikanz besitzen. Eine mit den im Arbeitsbericht entwickelten Ansätzen generierte Lösung ist somit nur bei insignifikanten Rüst- und Transportzeiten aussagefähig.⁴²

- Das Modell bildet einen linearen Produktionsprozeß ab. *Es wird den häufig vorzufindenden vernetzten Fertigungsstrukturen damit nicht gerecht.*

Die formulierte Modellkritik macht deutlich, daß eine Reihe von Möglichkeiten bestehen, die Modelle zu erweitern. Bei vollständiger Gültigkeit der definierten Modellprämissen können die betrachteten Planungsansätze allerdings Gestaltungsalternativen der Fertigungs- und Transportlosgrößenplanung darstellen, womit es gelingt, die logistischen und produktionsplanungsspezifischen Interdependenzen richtig abzubilden.

⁴² Vgl. dazu Truscott, Scheduling Production, 1985 sowie Truscott, Capacity-Constrained Transportation Activities, 1986.

Anhang A

Bestimmung der zeitgewichteten Lagerhaltung

Innerhalb dieses Abschnittes wird explizit auf die Herleitung der Bestimmungsgleichungen der zeitgewichteten Lagerhaltung eingegangen. Die beiden analysierten Lagerfälle werden dabei getrennt betrachtet.

A 1 Staulagerfall

Im folgenden werden die in Kapitel 2 angegebenen Flächen ausmultipliziert und anschließend unter Zusammenfassung gleichartiger Ausdrücke zur Ermittlung der Bestimmungsgleichung für TPI_{SL}^G herangezogen.

$$A_1 = \left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot \left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot x_{p,s} \right] \cdot \frac{1}{2} \quad G-1$$

$$= \left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot \left(t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)$$
$$= t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2}$$

$$A_1 = t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} - x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} \quad A-1$$

$$A_{21} = \left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right) \cdot \left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot x_{p,s} \right] \quad G-2$$

$$= \left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right) \cdot \left(t_{DLZ} \cdot x_{p,s} - x \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)$$
$$= x \cdot t_{DLZ} + x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ}^2 \cdot x_{p,s} - \frac{x^2}{x_{p,s+1}} - x^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} + x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}}$$

$$A_{21} = x \cdot t_{DLZ} + 2 \cdot x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ}^2 \cdot x_{p,s} - \frac{x^2}{x_{p,s+1}} - x^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} \quad A-2$$

$$A_{22} = \left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right) \cdot \left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot x_{p,s+1} - \left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot x_{p,s} \right] \cdot \frac{1}{2} \quad G-3$$

$$= \left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right) \cdot \left[\left(t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} \right) - \left(t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right) \right]$$

$$= \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} + \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} - t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s}} + \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} -$$

$$- \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} + t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s+1}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}}$$

$$A_{22} = x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} - t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s}} - x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} +$$

$$+ t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s+1}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} \quad A-3$$

$$A_3 = \left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot \left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot x_{p,s+1} \right] \cdot \frac{1}{2} \quad G-4$$

$$= \left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot \left(t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} \right)$$

$$= t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2}$$

$$A_3 = t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} \quad A-4$$

Die zeitgewichtete Lagehaltung resultiert aus der Summation der vier definierten Flächen. Daher gilt:

$$TPI_{SL}^G = A_1 + A_{21} + A_{22} + A_3 \quad G-5$$

Wenn jetzt die berechneten Werte der Flächen (A-1 bis A-4) in G-5 eingesetzt und die separaten Ausdrücke dergestalt geordnet werden, so daß sich alle in runden Klammern gefaßten Terme zu null ergeben, dann läßt sich TPI_{SL}^G wie folgt angeben:

$$\begin{aligned}
TPI_{SL}^G = & \left(t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} - t_{DLZ}^2 \cdot x_{p,s} + t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} \right) + \\
& + \left(-x \cdot t_{DLZ} \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} + 2 \cdot x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right) + \\
& + \left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} - x^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} \right) + \\
& + \left(-t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} + t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} \right) + \left(x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} - x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} \right) + \\
& + \left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} \right) + x \cdot t_{DLZ} - x^2 \cdot \frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s+1}}
\end{aligned}$$

Aus den verbleibenden Termen ergibt sich als zeitgewichtete Lagerhaltung für ein Staulager:

$$TPI_{SL}^G = x \cdot t_{DLZ} - \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s}} + \frac{1}{x_{p,s+1}} \right) \quad G-9$$

A 2 Zerreißlager

Zur grafischen Veranschaulichung der nachfolgenden Berechnungen dient die Abbildung 11.

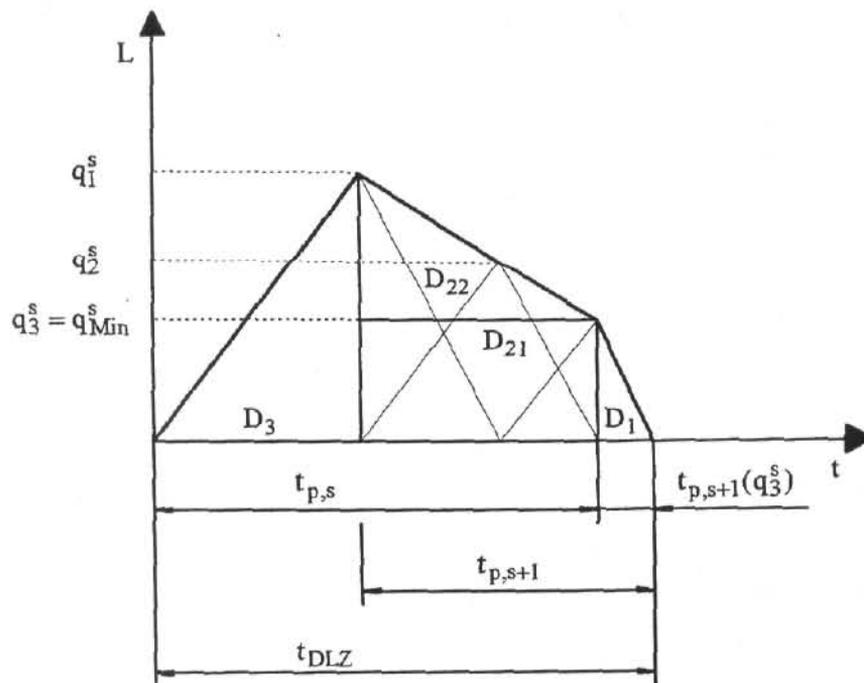


Abbildung 11: Zeitgewichtete Lagerhaltung im Zerreißlagerfall für drei Transportlose nach GOYAL

Die Abbildung 11 illustriert beispielhaft den Lagerbestandsverlauf eines aus drei unterschiedlich großen Transportlosen bestehenden Fertigungsloses für ein *Zerreiβlager*. In Analogie zu dem bereits betrachteten Staulagerfall gilt auch hier, daß der dargestellte Verlauf kennzeichnend für ein Zerreiβlager ist und daher keine Abhängigkeit von der Anzahl der Transportlose aufweist. Für den jetzt vorliegenden Lagerfall bezeichnen die dick eingerahmten Flächen D_1 bis D_3 die zur Bestimmung von TPI_{ZL}^G zu berechnende Fläche. Zunächst ist es notwendig, die genannten Flächen zu definieren. Daran anschließend werden die für die Flächen D_1 bis D_3 erhaltenen Terme wiederum ausmultipliziert und nachfolgend unter Zusammenfassung gleichartiger Ausdrücke zur Ermittlung der Bestimmungsgleichung für TPI_{ZL}^G verwendet. Unter Nutzung der Relationen $t_{p,s} = x/x_{p,s}$ und $t_{p,s+1} = x/x_{p,s+1}$ ergibt sich für D_1 bis D_3 :

$$D_1 = \underbrace{\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right)}_{t_{p,s+1}(q_3^S) = t_{DLZ} - t_{p,s}} \cdot \underbrace{\left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot x_{p,s+1} \right]}_{q_3^S = q_{Min}^S} \cdot \frac{1}{2} \quad A-5$$

$$= \left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot \left(t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} \right)$$

$$= t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2}$$

$$D_1 = t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} \quad A-6$$

$$D_{21} = \underbrace{\left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right)}_{t_{p,s} + t_{p,s+1} - t_{DLZ}} \cdot \underbrace{\left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot x_{p,s+1} \right]}_{q_3^S = q_{Min}^S} \quad A-7$$

$$= \left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right) \cdot \left(t_{DLZ} \cdot x_{p,s+1} - x \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} \right)$$

$$= x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} + x \cdot t_{DLZ} - t_{DLZ}^2 \cdot x_{p,s+1} - x^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} - \frac{x^2}{x_{p,s}} + x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}}$$

$$D_{21} = x \cdot t_{DLZ} + 2 \cdot x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} - t_{DLZ}^2 \cdot x_{p,s+1} - \frac{x^2}{x_{p,s}} - x^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} \quad A-8$$

$$D_{22} = \underbrace{\left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right)}_{t_{p,s} + t_{p,s+1} - t_{DLZ}} \cdot \underbrace{\left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot x_{p,s} - \left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot x_{p,s+1} \right]}_{q_1^s - q_3^s} \cdot \frac{1}{2} \quad A-9$$

$$= \left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right) \cdot \left[\left(t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right) - \left(t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} \right) \right]$$

$$= \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} + \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} + \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} -$$

$$- \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} + t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s}} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}}$$

$$D_{22} = x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} - x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} +$$

$$+ t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s}} \quad A-10$$

$$D_3 = \underbrace{\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right)}_{t_{DLZ} - t_{p,s+1}} \cdot \underbrace{\left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot x_{p,s} \right]}_{q_1^s} \cdot \frac{1}{2} \quad A-11$$

$$= \left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot \left(t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)$$

$$D_3 = t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} \quad A-12$$

Die zeitgewichtete Lagerhaltung ergibt sich wiederum durch Addition der vier angeführten Flächen A-6, A-8, A-10 und A-12. Demzufolge gilt auch hier:

$$TPI_{ZL}^G = D_1 + D_{21} + D_{22} + D_3 \quad A-13$$

Werden jetzt die ermittelten Ausdrücke der Flächen D_1 bis D_3 (A-6, A-8, A-10, A-12) in A-13 eingesetzt und die einzelnen Terme dergestalt geordnet, so daß sich alle in runden Klammern gefaßten Ausdrücke zu null ergeben, dann folgt daraus für TPI_{ZL}^G :

$$\begin{aligned}
TPI_{ZL}^G &= \left(t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - t_{DLZ}^2 \cdot x_{p,s+1} + t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} \right) + \\
&+ \left(-x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} + 2 \cdot x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} - x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} \right) + \\
&+ \left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} - x^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} \right) + \\
&+ \left(-t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} + t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} \right) + \left(x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right) + \\
&\left(-\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} \right) + x \cdot t_{DLZ} - x^2 \cdot \frac{1}{x_{p,s}} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s+1}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s}}
\end{aligned}$$

Aus den verbleibenden Termen resultiert zunächst als zeitgewichtete Lagerhaltung für ein Zerreiblager:

$$TPI_{ZL}^G = x \cdot t_{DLZ} - \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s}} + \frac{1}{x_{p,s+1}} \right) \quad A-14$$

Die Durchlaufzeit eines gesamten Fertigungsloses bezogen auf das in der Abbildung 11 betrachtete Stufenpaar ergibt sich zu:

$$t_{DLZ} = t_{p,s+1}(q_3^s) + t_{p,s} \quad A-15$$

Mit $t_{p,s+1}(q_3^s) = \frac{q_{Min}^s}{x_{p,s+1}}$ und $t_{p,s} = \frac{x}{x_{p,s}}$ läßt sich obige Gleichung wie folgt darstellen:

$$t_{DLZ} = \frac{q_{Min}^s}{x_{p,s+1}} + \frac{x}{x_{p,s}} \quad A-16$$

Wird nun die Durchlaufzeit in A-14 durch A-16 ersetzt, so ergibt sich als Bestimmungsgleichung für TPI_{ZL}^G :

$$TPI_{ZL}^G = x \cdot q_{Min}^s \cdot \frac{1}{x_{p,s+1}} + \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s}} - \frac{1}{x_{p,s+1}} \right) \quad G-10$$

Anhang B

Nachweis der Konvexitätseigenschaften

Im Rahmen dieses Abschnittes werden die relevanten Konvexitätseigenschaften der Funktion der entscheidungsrelevanten Kosten bewiesen. Die Funktion $K(x, M)$ lautet:

$$K(x, M) = \sum_{s=1}^S \left[\frac{x \cdot c_{L,s} \cdot A_s(q_{\text{Min}}^s, m_s) \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1}} + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{\min(x_p)_{s,s+1}} - \frac{1}{\max(x_p)_{s,s+1}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B \right] + \sum_{s=1}^S (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m_s) \cdot \frac{B}{x}$$

G-17

mit:

$$A_s(q_{\text{Min}}^s, m_s) = \frac{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right) - 1}{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{m_s} - 1} \quad \text{für } s=1(1)S$$

G-13

$$M = \{m_1, m_2, \dots, m_s\}$$

$$x_{p;S+1} = x_a < \min_{1 \leq s \leq S} [x_{p;s}]$$

In allgemeiner Form wird eine Funktion $f(y)$ als konvex bezeichnet, wenn für zwei beliebige Punkte y_1 und y_2 sowie für alle λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ die folgende Bedingung erfüllt ist:¹

$$f(\lambda \cdot y_1 + (1 - \lambda) \cdot y_2) \leq \lambda \cdot f(y_1) + (1 - \lambda) \cdot f(y_2) \quad \text{B-1}$$

Bezüglich einer Funktion, die sich additiv aus einer beliebigen Anzahl von $i=1, \dots, n$ Einzelfunktionen zusammensetzt, gilt, daß „... die Summe von konvexen Funktionen eine konvexe Funktion [ist].“²

¹ Vgl. Hadley, Programmierung, 1969, S. 112.

² Vgl. im folgenden Hadley, Programmierung, 1969, S. 115 und S. 137ff.

Die angegebene Bedingung ist in allgemeiner Form in den nachstehenden zwei Fällen gewährleistet:

- $F(y) = \sum_{i=1}^n f_i(y)$ ist konvex, falls alle Funktionen $f_i(y)$ konvex sind.
- $F(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n f_i(y_i)$ ist ebenfalls konvex, wenn alle Funktionen $f_i(y_i)$ konvex sind.

B-2

Anhand der bisherigen Ausführungen kann festgestellt werden, daß eine Unterscheidung in die beiden betrachteten Variationen des Planungsansatzes bezüglich der Berücksichtigung einer identischen Transporthäufigkeit bzw. stufenbezogener Transporthäufigkeiten nicht notwendig ist. Für die sich anschließenden Betrachtungen ist es damit ausreichend, den Fall stufenbezogener Transporthäufigkeiten zu analysieren. Die erhaltenen Ergebnisse sind damit vollständig auch auf die Berücksichtigung einer identischen Transporthäufigkeit übertragbar.

B 1 Beweis der Konvexität für einen gegebenen Vektor der Transporthäufigkeiten

Für den zu führenden Nachweis sind alle Elemente des Vektors der Transporthäufigkeiten als konstante Planungsparameter anzusehen.

Im weiteren Verlauf dieses Beweises werden zur besseren Übersichtlichkeit der Darstellungen die folgenden Vereinfachungen verwendet:

$$\alpha = \sum_{s=1}^S \left[\frac{c_{L,s} \cdot A_s(q_{\text{Min}}, m_s) \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\min(x_p)_{s,s+1}} - \frac{1}{\max(x_p)_{s,s+1}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B \right]$$

$$\beta = \sum_{s=1}^S (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m_s) \cdot B$$

Die Konvexitätsbedingung B-1 besitzt für die Kostenfunktion G-17 die Struktur:

$$K[\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2] \leq \lambda \cdot K(x_1) + (1 - \lambda) \cdot K(x_2) \quad \text{B-3}$$

Es sind somit die erforderlichen Funktionen zu entwickeln.

$$K[\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2] = (\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2) \cdot \alpha + \frac{1}{(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2)} \cdot \beta \quad \text{B-4}$$

$$\lambda \cdot K(x_1) = \lambda \cdot x_1 \cdot \alpha + \lambda \cdot \frac{1}{x_1} \cdot \beta \quad \text{B-5}$$

$$(1 - \lambda) \cdot K(x_2) = (1 - \lambda) \cdot x_2 \cdot \alpha + (1 - \lambda) \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \beta \quad \text{B-6}$$

Werden jetzt B-4, B-5 sowie B-6 in die Ungleichung B-3 eingesetzt und des weiteren auf beiden Seiten der Ausdruck $(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2) \cdot \alpha$ subtrahiert, dann ergibt sich:

$$\frac{1}{(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2)} \cdot \beta \leq \left(\lambda \cdot \frac{1}{x_1} + (1 - \lambda) \cdot \frac{1}{x_2} \right) \cdot \beta \quad \text{B-7}$$

Die Division beider Seiten der obigen Ungleichung durch β führt zu dem nachstehenden Ausdruck, der noch wie aufgezeigt, umzuformen ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2)} &\leq \lambda \cdot \frac{1}{x_1} + (1 - \lambda) \cdot \frac{1}{x_2} && | \cdot x_1 \\ \frac{x_1}{(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2)} &\leq \lambda + (1 - \lambda) \cdot \frac{x_1}{x_2} && | \cdot x_2 \\ \frac{x_1 \cdot x_2}{(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2)} &\leq \lambda \cdot x_2 + (1 - \lambda) \cdot x_1 && | \cdot (\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2) \end{aligned}$$

$$x_1 \cdot x_2 \leq \lambda^2 \cdot x_1 \cdot x_2 + \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot x_2^2 + \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot x_1^2 + (1 - \lambda)^2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$x_1 \cdot x_2 \leq \lambda^2 \cdot x_1 \cdot x_2 + \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot x_2^2 + \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot x_1^2$$

$$+ x_1 \cdot x_2 + \lambda^2 \cdot x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot \lambda \cdot x_1 \cdot x_2 \quad | - x_1 \cdot x_2$$

$$0 \leq \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot (x_1^2 + x_2^2) + 2 \cdot \lambda^2 \cdot x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot \lambda \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$0 \leq \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot (x_1^2 + x_2^2) + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (\lambda^2 - \lambda)$$

$$0 \leq \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot (x_1^2 + x_2^2) - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (\lambda - \lambda^2)$$

$$0 \leq \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot (x_1^2 + x_2^2) - \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot 2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$0 \leq \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot (x_1 - x_2)^2 \quad \text{B-8}$$

Die Ungleichung B-8 besitzt für $0 \leq \lambda \leq 1$ stets Gültigkeit. Demzufolge gilt, daß die untersuchte Kostenfunktion G-17 für einen gegebenen Vektor der Transporthäufigkeiten einen konvexen Verlauf hinsichtlich x aufweist.

B 2 Beweis der Konvexität für eine gegebene Fertigungslosgröße

Für den Beweis ist es ausreichend aus der Gesamtkostenfunktion G-17 die Teilfunktion:

$$H_s(m_s) = \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot \left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} - 1 \right) \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1} \cdot \left(\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{m_s} - 1 \right)} + k_{T,s} \cdot m_s \cdot \frac{B}{x} \quad \text{G-25}$$

einer Analyse zu unterziehen.³

Auch für diesen Nachweis werden zur übersichtlicheren Gestaltung der Beweisführung die nachstehenden Vereinfachungen verwendet:

$$\alpha = \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot \left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} - 1 \right) \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1}} \quad \beta = k_{T,s} \cdot \frac{B}{x}$$

Die Konvexitätsbedingung B-1 erhält für die Teilfunktion G-25 die folgende Struktur:

$$H_s[\lambda \cdot m_{s1} + (1-\lambda) \cdot m_{s2}] \leq \lambda \cdot H_s(m_{s1}) + (1-\lambda) \cdot H_s(m_{s2}) \quad \text{B-9}$$

In Analogie zu Anhang B 1 sind wiederum die notwendigen Funktionen zu definieren.

$$H_s[\lambda \cdot m_{s1} + (1-\lambda) \cdot m_{s2}] = \frac{1}{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{(\lambda \cdot m_{s1} + (1-\lambda) \cdot m_{s2})} - 1} \cdot \alpha + (\lambda \cdot m_{s1} + (1-\lambda) \cdot m_{s2}) \cdot \beta \quad \text{B-10}$$

$$\lambda \cdot H_s(m_{s1}) = \lambda \cdot \frac{1}{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{m_{s1}} - 1} \cdot \alpha + \lambda \cdot m_{s1} \cdot \beta \quad \text{B-11}$$

³ G-25 besitzt für alle $s=1(1)S$ eine identische Struktur. Wenn demnach für genau ein s die relevante Konvexitätseigenschaft bezüglich G-25 gezeigt werden kann, dann folgt daraus, aufgrund der in B-2 enthaltenen Ausführungen, daß ebenfalls die Summe aller S Gleichungen der Struktur G-25 einen konvexen Verlauf aufweist. Weiterhin gilt, daß die anderen Terme der Ausgangsfunktion G-17 unabhängig von den jeweiligen Transporthäufigkeiten sind. Bedingt durch die additive Zusammensetzung der Kostenfunktion haben sie damit keinen Einfluß auf die zu beweisende Konvexitätseigenschaft.

$$(1-\lambda) \cdot H_s(m_{s2}) = (1-\lambda) \cdot \frac{1}{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{m_{s2}} - 1} \cdot \alpha + (1-\lambda) \cdot m_{s2} \cdot \beta \quad \text{B-12}$$

Aus dem Einsetzen von B-10 bis B-12 in B-9 und der Subtraktion des Ausdruckes $(\lambda \cdot m_{s1} + (1-\lambda) \cdot m_{s2}) \cdot \beta$ auf beiden Seiten der Ungleichung resultiert:

$$\frac{1}{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{(\lambda \cdot m_{s1} + (1-\lambda) \cdot m_{s2})} - 1} \cdot \alpha \leq \left\{ \lambda \cdot \frac{1}{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{m_{s1}} - 1} + (1-\lambda) \cdot \frac{1}{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{m_{s2}} - 1} \right\} \cdot \alpha \quad \text{B-13}$$

Die Division beider Seiten von B-13 durch α ergibt die nachstehende Ungleichung:

$$\frac{1}{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{(\lambda \cdot m_{s1} + (1-\lambda) \cdot m_{s2})} - 1} \leq \frac{\lambda}{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{m_{s1}} - 1} + \frac{(1-\lambda)}{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{m_{s2}} - 1} \quad \text{B-14}$$

Die Gültigkeit der obigen Ungleichung wird im folgenden mit Hilfe einer grafischen Analyse nachgewiesen.

Die einzelnen Terme von B-14 basieren auf der Funktion:

$$f(m) = \frac{1}{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^m - 1} \quad \text{mit: } m > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} > 1$$

Allgemeingültig zeigt die Abbildung 12 das Bild dieser Funktion.

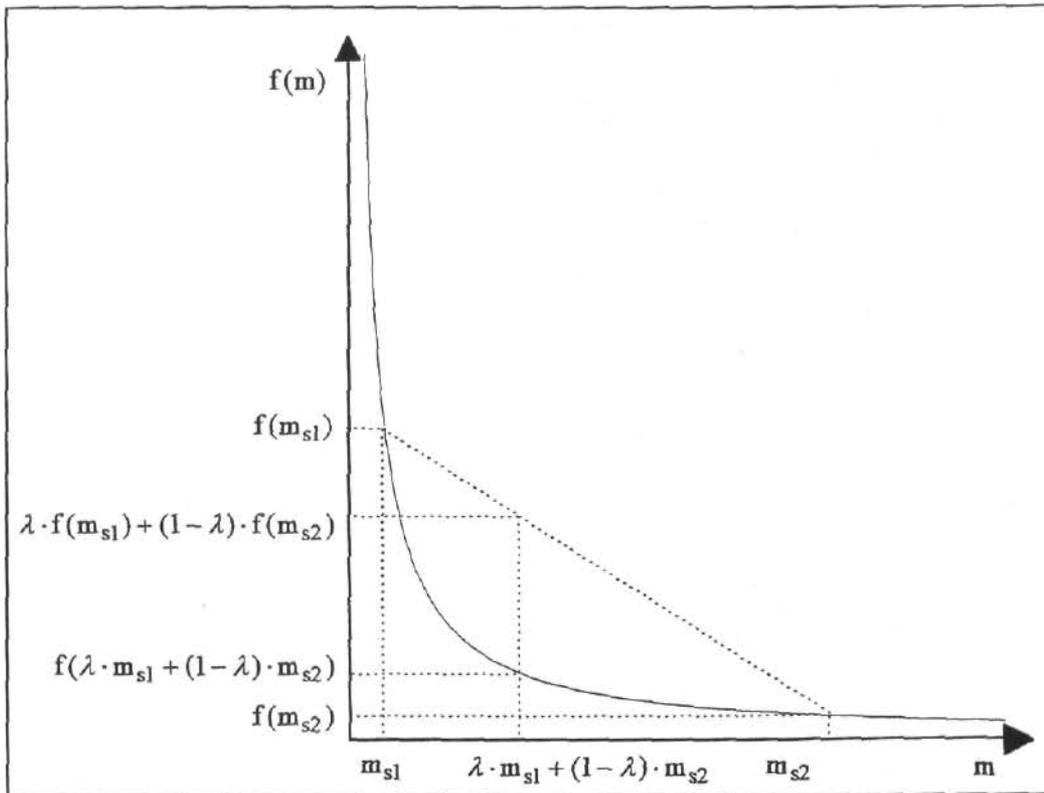


Abbildung 12: Beweis der Konvexität für eine gegebene Fertigungslosgröße

Die Ungleichung B-14 kann unter Nutzung von $f(m)$ wie folgt dargestellt werden:

$$f[\lambda \cdot m_{s1} + (1 - \lambda) \cdot m_{s2}] \leq \lambda \cdot f(m_{s1}) + (1 - \lambda) \cdot f(m_{s2}) \quad \text{B-15}$$

Wie die Abbildung 12 verdeutlicht, gilt, daß B-14 für $0 \leq \lambda \leq 1$ jederzeit erfüllt ist. Damit ist gezeigt, daß die Funktion G-25 für einen gegebenen Wert der Fertigungslosgröße einen konvexen Verlauf bezüglich m besitzt.

Anhang C

Herleitung von Bestimmungsgleichungen

In diesem Abschnitt werden grundsätzlich die zugehörigen notwendigen Optimalitätsbedingungen bezüglich der in Kapitel 2 angegebenen Bestimmungsgleichungen der jeweiligen Entscheidungsvariablen aufgeführt.

Die Funktion der entscheidungsrelevanten Kosten ergab sich zu:

$$K(x, M) = \sum_{s=1}^S \left[\frac{x \cdot c_{L,s} \cdot A_s(q_{\text{Min}}^s, m_s) \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1}} + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{\min(x_p)_{s,s+1}} - \frac{1}{\max(x_p)_{s,s+1}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B \right] + \sum_{s=1}^S (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m_s) \cdot \frac{B}{x}$$

G-17

mit:

$$A_s(q_{\text{Min}}^s, m_s) = \frac{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right) - 1}{\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{m_s} - 1} \quad \text{für } s=1(1)S$$

G-13

$$M = \{m_1, m_2, \dots, m_s\}$$

$$x_{p,s+1} = x_a < \min_{1 \leq s \leq S} [x_{p,s}]$$

In allgemeiner Form lautet die notwendige Bedingung für die Ermittlung des Optimums einer Funktion $f(y)$:

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} \stackrel{!}{=} 0$$

C-1

Die hinreichende Optimalitätsbedingung ist für die Funktion $f(y)$ stets erfüllt, wenn sie konvex ist. Bezüglich der aus der Kostenfunktion $K(x, M)$ abgeleiteten Bestimmungsgleichungen wird an der entsprechenden Stelle des Kapitels 2 auf den relevanten Konvexitätsbeweis verwiesen.

- a) Notwendige Optimalitätsbedingung für die optimale Fertigungslosgröße bei einer für alle Stufenpaare identischen, gegebenen Transporthäufigkeit m

$$\frac{\partial \mathcal{K}(x, m)}{\partial x} = \sum_{s=1}^S \left[\frac{c_{L,s} \cdot A_s(q_{Min}^s, m) \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\min(x_p)_{s,s+1}} - \frac{1}{\max(x_p)_{s,s+1}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B \right] - \sum_{s=1}^S (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot \frac{B}{x^2} = 0$$

C-2

- b) Notwendige Optimalitätsbedingung für die optimale Fertigungslosgröße bei einem gegebenen Vektor der stufenbezogenen Transporthäufigkeiten M

$$\frac{\partial \mathcal{K}(x, M)}{\partial x} = \sum_{s=1}^S \left[\frac{c_{L,s} \cdot A_s(q_{Min}^s, m_s) \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\min(x_p)_{s,s+1}} - \frac{1}{\max(x_p)_{s,s+1}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B \right] - \sum_{s=1}^S (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m_s) \cdot \frac{B}{x^2} = 0$$

C-3

- c) Herleitung der optimalen reellwertigen stufenbezogenen Transporthäufigkeit $m_{s,opt}^G$ für eine gegebene Fertigungslosgröße

Die notwendige Optimalitätsbedingung lautet:

$$\frac{\partial \mathcal{K}(x, M)}{\partial m_s} = k_{T,s} \cdot \frac{B}{x} \cdot \left[\frac{\left(\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right) - 1 \right) \cdot \ln \left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right) \cdot \left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{m_s}}{\left(\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{m_s} - 1 \right)^2} \right] \cdot \left(\frac{x \cdot c_{L,s} \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1}} \right)^! = 0$$

C-4

Im weiteren Verlauf der Herleitung werden für obige Gleichung die nachstehenden Vereinfachungen verwendet:

$$Z_s = \left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{m_s} \qquad L_s = \left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)$$

Unter Nutzung der Vereinfachungen läßt sich C-4 wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{K}(x, M)}{\partial m_s} &= k_{T,s} \cdot \frac{B}{x} - \left[\frac{(L_s - 1) \cdot \ln(L_s) \cdot Z_s}{(Z_s - 1)^2} \right] \cdot \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1}} = 0 && | : B \\
 &= k_{T,s} \cdot \frac{1}{x} - \left[\frac{(L_s - 1) \cdot \ln(L_s) \cdot Z_s}{(Z_s - 1)^2} \right] \cdot \frac{x \cdot c_{L,s}}{\max(x_p)_{s,s+1}} = 0 && \left. \begin{array}{l} | \cdot \max(x_p)_{s,s+1} \\ | \cdot x \end{array} \right. \\
 &= k_{T,s} \cdot \max(x_p)_{s,s+1} - \left[\frac{(L_s - 1) \cdot \ln(L_s) \cdot Z_s}{(Z_s - 1)^2} \right] \cdot c_{L,s} \cdot x^2 = 0 && | \cdot (Z_s - 1)^2 \\
 &= k_{T,s} \cdot \max(x_p)_{s,s+1} \cdot (Z_s^2 - 2 \cdot Z_s + 1) - (L_s - 1) \cdot \ln(L_s) \cdot Z_s \cdot c_{L,s} \cdot x^2 = 0 \\
 &= k_{T,s} \cdot \max(x_p)_{s,s+1} \cdot Z_s^2 - Z_s \cdot \left[\frac{2 \cdot k_{T,s} \cdot \max(x_p)_{s,s+1} +}{(L_s - 1) \cdot \ln(L_s) \cdot c_{L,s} \cdot x^2} \right] + k_{T,s} \cdot \max(x_p)_{s,s+1} = 0 \\
 &&& | : k_{T,s} \cdot \max(x_p)_{s,s+1}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}(x, M)}{\partial m_s} = Z_s^2 - Z_s \cdot \left[2 + \frac{(L_s - 1) \cdot \ln(L_s) \cdot c_{L,s} \cdot x^2}{k_{T,s} \cdot \max(x_p)_{s,s+1}} \right] + 1 = 0$$

Wie die bis jetzt durchgeführten Umformungsschritte bezüglich B-4 aufzeigen, ist diese Gleichung anhand der gewählten Vorgehensweise nicht direkt nach m_s auflösbar. Bevor die Möglichkeit besteht, die entsprechende Ausprägung zu ermitteln, ist, wie aus dem letzten Umformungsschritt hervorgeht, zunächst der Wert Z_s zu bestimmen. Die Z_s enthaltende Gleichung stellt eine quadratische Gleichung in Normalform dar.

Demzufolge berechnen sich die relevanten Ausprägungen von Z_s mit:⁴

$$Y_s = 2 + \frac{\left(\left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right) - 1 \right) \cdot \ln \left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot x^2}{k_{T,s} \cdot \max(x_p)_{s,s+1}} \quad \text{G-23}$$

zu:

$$Z_{s-}^+ = \frac{Y_s}{2} \pm \sqrt{\frac{Y_s^2}{4} - 1}$$

⁴ In Y_s ist für L_s wieder der Ausgangsterm eingesetzt.

mit:

$$Z_s^- = \frac{Y_s}{2} - \sqrt{\frac{Y_s^2}{4} - 1}$$

$$Z_s^+ = \frac{Y_s}{2} + \sqrt{\frac{Y_s^2}{4} - 1}$$

G-24

Der Wert Z_s^+ ist deshalb der für die weitere Lösung relevante Wert, weil Z_s^- stets Ausprägungen annimmt, die ≤ 1 sind. Damit wären allerdings, wie die anschließenden Rechenschritte verdeutlichen werden, negative Werte hinsichtlich der optimalen reellwertigen stufenbezogenen Transporthäufigkeit für eine gegebene Fertigungslosgröße verbunden.

Wird jetzt G-24 zur Ermittlung der optimalen reellen stufenbezogenen Transporthäufigkeit für ein gegebenes x genutzt, dann ergibt sich gemäß der oben getätigten Vereinbarung für Z_s^+ :

$$Z_s^+ = \left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)^{m_s}$$

Aus dem Logarithmieren beider Seiten der obigen Gleichung resultiert:

$$\ln(Z_s^+) = m_s \cdot \ln \left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)$$

Hieraus folgt als Bestimmungsgleichung der optimalen reellwertigen stufenbezogenen Transporthäufigkeit für ein gegebenes x :

$$m_{s,\text{opt}}^G(x) = \frac{\ln(Z_s^+)}{\ln \left(\frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \right)} \quad \text{für } s=1(1)S \quad \text{G-22}$$

Anhang D

Beweis zur Bestimmung ganzzahlig optimaler stufenbezogener Transporthäufigkeiten für die vereinfachte Berechnungsvorschrift

Im Rahmen dieses Abschnittes wird nachgewiesen, daß sich die einem beliebigen Wert einer stufenbezogenen Vergleichslosgröße entsprechende optimale nicht ganzzahlige Transporthäufigkeit stets unterhalb der Ausprägung $m_s^g + 0,5$ befindet.

Die Funktion $H_s(m_s)$ lautet:

$$H_s(m_s) = \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot (L_s - 1) \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1} \cdot [(L_s)^{m_s} - 1]} + k_{T,s} \cdot m_s \cdot \frac{B}{x} \quad \text{mit: } L_s = \frac{\max(x_p)_{s,s+1}}{\min(x_p)_{s,s+1}} \quad \text{für } s=1(1)S$$

G-25

Ihre erste Ableitung nach der Entscheidungsvariablen m_s ergibt sich zu:

$$\frac{\partial H_s(m_s)}{\partial m_s} = k_{T,s} \cdot \frac{B}{x} - \left[\frac{(L_s - 1) \cdot \ln(L_s) \cdot (L_s)^{m_s}}{[(L_s)^{m_s} - 1]^2} \right] \cdot \left(\frac{x \cdot c_{L,s} \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1}} \right) \quad \text{C-4}$$

Für den zu erbringenden Beweis ist des weiteren die Kenntnis der zweiten und dritten Ableitung der Funktion $H_s(m_s)$ nach m_s erforderlich. Um die zweite Ableitung von $H_s(m_s)$ zu erhalten, ist C-4 unter Nutzung der Quotientenregel nach m_s zu differenzieren. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_s(m_s)}{\partial m_s^2} &= \left\{ \frac{[(L_s)^{m_s} - 1]^2 \cdot \ln(L_s) \cdot (L_s)^{m_s} - (L_s)^{m_s} \cdot 2 \cdot [(L_s)^{m_s} - 1] \cdot \ln(L_s) \cdot (L_s)^{m_s}}{[(L_s)^{m_s} - 1]^4} \right\} \cdot \frac{(L_s - 1) \cdot \ln(L_s) \cdot x \cdot c_{L,s} \cdot B}{\max(x_p)_{s,s+1} \cdot \alpha} \\ &= - \left\{ \frac{[(L_s)^{m_s} - 1] - 2 \cdot (L_s)^{m_s}}{[(L_s)^{m_s} - 1]^3} \right\} \cdot \ln(L_s) \cdot (L_s)^{m_s} \cdot \alpha \\ &= - \left\{ \frac{-(L_s)^{m_s} - 1}{[(L_s)^{m_s} - 1]^3} \right\} \cdot \ln(L_s) \cdot (L_s)^{m_s} \cdot \alpha \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{(L_s)^{m_s} + 1}{[(L_s)^{m_s} - 1]^3} \right\} \cdot \ln(L_s) \cdot (L_s)^{m_s} \cdot \alpha$$

$$\frac{\partial^2 H_s(m_s)}{\partial m_s^2} = \left\{ \frac{(L_s)^{2 \cdot m_s} + (L_s)^{m_s}}{[(L_s)^{m_s} - 1]^3} \right\} \cdot \underbrace{\ln(L_s) \cdot \alpha}_{\beta} \quad \text{D-1}$$

Die dritte Ableitung der Funktion $H_s(m_s)$ nach m_s resultiert, wenn D-1 wiederum durch Anwendung der Quotientenregel nach m_s differenziert wird.

$$\frac{\partial^3 H_s(m_s)}{\partial m_s^3} = \left\{ \frac{\left[(L_s)^{m_s} - 1 \right]^3 \cdot \left[2 \cdot \ln(L_s) \cdot (L_s)^{2 \cdot m_s} + \ln(L_s) \cdot (L_s)^{m_s} \right]}{\left[(L_s)^{m_s} - 1 \right]^6} - \frac{\left[(L_s)^{2 \cdot m_s} + (L_s)^{m_s} \right] \cdot 3 \cdot \left[(L_s)^{m_s} - 1 \right]^2 \cdot \ln(L_s) \cdot (L_s)^{m_s}}{\left[(L_s)^{m_s} - 1 \right]^6} \right\} \cdot \beta$$

$$= \left\{ \frac{\left[(L_s)^{m_s} - 1 \right] \cdot \left[2 \cdot (L_s)^{2 \cdot m_s} + (L_s)^{m_s} \right] - 3 \cdot \left[(L_s)^{2 \cdot m_s} + (L_s)^{m_s} \right] \cdot (L_s)^{m_s}}{\left[(L_s)^{m_s} - 1 \right]^4} \right\} \cdot \ln(L_s) \cdot \beta$$

$$= \left\{ \frac{2 \cdot (L_s)^{3 \cdot m_s} + (L_s)^{2 \cdot m_s} - 2 \cdot (L_s)^{2 \cdot m_s} - (L_s)^{m_s} - 3 \cdot (L_s)^{3 \cdot m_s} - 3 \cdot (L_s)^{2 \cdot m_s}}{\left[(L_s)^{m_s} - 1 \right]^4} \right\} \cdot \ln(L_s) \cdot \beta$$

$$\frac{\partial^3 H_s(m_s)}{\partial m_s^3} = \left\{ \frac{(L_s)^{3 \cdot m_s} + 4 \cdot (L_s)^{2 \cdot m_s} + (L_s)^{m_s}}{\left[(L_s)^{m_s} - 1 \right]^4} \right\} \cdot \ln(L_s) \cdot \beta \quad \text{D-2}$$

Es konnte bereits festgestellt werden, daß die Funktion $H_s(m_s)$ für einen gegebenen Wert der Fertigungslosgröße und demzufolge auch für jede spezielle Ausprägung einer stufenbezogenen Vergleichslosgröße einen konvexen Verlauf bezüglich m_s aufweist (vgl. Abbildung 4). Formal gibt die Gleichung C-4 diesen Sachverhalt wieder. Sie resultiert für einen gegebenen Wert der stufenbezogenen Vergleichslosgröße bis zum Erreichen der korrespondierenden optimalen reellwertigen Transporthäufigkeit in negativen Anstiegswerten, in dem entsprechenden Punkt liegt eine Steigung von null vor und nach dem Überschreiten der genannten Ausprägung treten

positive Anstiegswerte auf. Die Steigung von $H_s(m_s)$ ist hierbei eine monoton wachsende Funktion. Dies ist deshalb der Fall, weil D-1 unabhängig von dem betrachteten Wert der Transporthäufigkeit stets positive Ausprägungen annimmt. Da allerdings D-2 für den jeweiligen Wert der Transporthäufigkeit immer negative Funktionswerte erbringt, gilt, daß die Steigung der Funktion $H_s(m_s)$ in Richtung zunehmender Werte von m_s abnimmt. Zur grafischen Veranschaulichung der beschriebenen Problematik dient die Abbildung 13. Sie illustriert den Verlauf des Anstieges von $H_s(m_s)$ in Abhängigkeit von den Ausprägungen der Transporthäufigkeit.

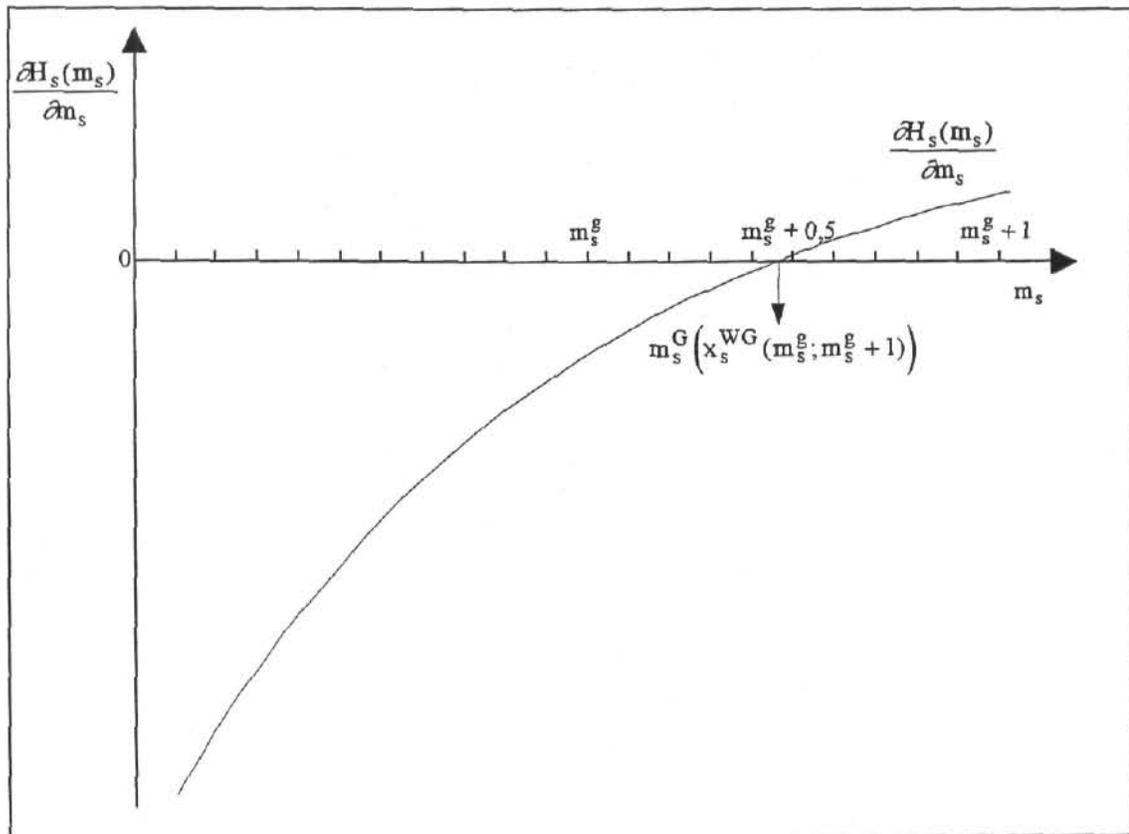


Abbildung 13: Verlauf des Anstieges der Funktion $H_s(m_s)$ bei Berücksichtigung stufenbezogener Transporthäufigkeiten

Die Abbildung 13 zeigt in Verbindung mit den vorhergehenden Ausführungen auf, daß die zugehörige optimale reellwertige Transporthäufigkeit für einen konkreten Wert einer stufenbezogenen Vergleichslosgröße stets näher an m_s^g liegt als an $m_s^g + 1$. Somit befindet sie sich unabhängig von der betrachteten Vergleichslosgröße immer unterhalb von $m_s^g + 0,5$. Damit konnte die Richtigkeit der vereinfachten Berechnungsvorschrift zur Bestimmung ganzzahlig optimaler Transporthäufigkeiten nachgewiesen werden.

Literaturverzeichnis

- Adam, D. (Produktionsdurchführungsplanung, 1990): Produktionsdurchführungsplanung, in: Jacob, H. (Hrsg.), *Industriebetriebslehre*, 4. Aufl., Wiesbaden 1990, S. 673-918.
- Adam, D. (Produktions-Management, 1998): *Produktions-Management*, 8. Aufl., Wiesbaden 1998.
- Bloech, J./Bogaschewsky, R./Götze, U./Roland, F. (Produktion, 1998): *Einführung in die Produktion*, 3. Aufl., Heidelberg 1998.
- Bogaschewsky, R. (Losgröße, 1996): Losgröße, in: Kern, W./Schröder, H.-H./Weber, J. (Hrsg.), *Handwörterbuch der Produktionswirtschaft*, 2. Aufl., Stuttgart 1996, Sp. 1141-1158.
- Bogaschewsky, R. (Planung, 1998): Zentrale versus dezentrale Planung der Fertigungs- und Transportlosgröße, in: Bogaschewsky, R./Götze, U. (Hrsg.), *Unternehmensplanung und Controlling – Festschrift zum 60. Geburtstag von Jürgen Bloech*, Heidelberg 1998, S. 287-307.
- Bogaschewsky, R./Buscher, U. (Transportlosgrößenplanung, 1999): Simultane Fertigungs- und Transportlosgrößenplanung – ein statischer Ansatz für die Sortenfertigung, in: *WiSt*, Heft 7 (1999), S. 335-341 und S. 385-341.
- Bogaschewsky, R./Buscher, U./Lindner, G. (Simultanplanung 1999): Simultanplanung von Fertigungslosgröße und Transportlosgrößen in einstufigen Fertigungssystemen – Zwei statisch deterministische Ansätze bei unrestringierten Kapazitäten, *Arbeitsbericht des Lehrstuhls für Betriebswirtschaftslehre, insbesondere Produktionswirtschaft, Desdner Beiträge zur Betriebswirtschaftslehre*, Nr. 24, 1999.
- Glass, C. A./Gupta, J. N. D./Potts, C. N. (Lot Streaming, 1994): Lot Streaming in Three-Stage Production Processes, in: *European Journal of Operational Research*, Vol. 75 (1994), Nr. 2, S. 378-394.
- Goyal, S. K. (Optimum Production Quantity, 1977): Determination of Optimum Production Quantity for a Two-Stage Production System, in: *Operational Research Quaterly*, Vol. 28 (1977), Nr. 4, S. 865-870.
- Goyal, S. K. (Alternative Approach, 1978): An Alternative Approach for Determining Economic Production Quantity in a Two-Stage Production System - A Rejoinder, in: *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 30 (1978), Nr. 2, S. 177-179.
- Goyal, S. K./Szendrovits, A. Z. (Lot Size Model, 1986): A Constant Lot Size Model with Equal and Unequal Sized Batch Shipments between Production Stages, in: *Engineering Costs and Production Economics*, Vol. 10 (1986), S. 203-210.
- Hadley, G. (Programmierung, 1969): *Nichtlineare und dynamische Programmierung*, Berlin 1969.

- Szendrovits, A. Z. (Manufacturing Cycle Time, 1975): Manufacturing Cycle Time Determination for a Multi-Stage Economic Production Quantity Model, in: *Management Science*, Vol. 22 (1975), Nr. 3, S. 298-308.
- Szendrovits, A. Z. (Rejoinder, 1976): On The Optimality Of Sub-Batch Sizes for a Multi-Stage EPQ Modell - A Rejoinder, in: *Management Science*, Vol. 23 (1976), Nr. 3, S. 334-338.
- Szendrovits, A. Z. (Comment, 1978): A Comment on Determination of Optimum Production Quantity for a Two-Stage Production System, in: *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 29 (1978), Nr. 10, S. 1017-1020.
- Szendrovits, A. Z./Drezner, Z. (Multi-Stage Production, 1980): Optimizing Multi-Stage Production with Constant Lot Size and Varying Numbers of Batches, in: *Omega*, Vol. 8 (1980), Nr. 6, S. 623-629.
- Szendrovits, A. Z./Truscott, W. G. (Manufacturing Cycle Time, 1989): *Fundamentals of Scheduling: The Manufacturing Cycle Time*, in: Wild, R. (Hrsg.), *International Handbook of Production and Operations Management*, London 1989, S. 324-347.
- Szendrovits, A. Z./Wesolowsky, G. O. (Variations in Optimizing, 1979): Variations in Optimizing Serial Multi-Stage Production/Inventory Systems, in: Ritzman, L. P. et al. (Hrsg.), *Disaggregation Problems in Manufacturing and Service Organizations*, Boston et al. 1979, S. 329-352.
- Truscott, W. G. (Scheduling Production, 1985): Scheduling Production Activities in Multi-Stage Batch Manufacturing Systems, in: *International Journal of Production Research*, Vol. 23 (1985), Nr. 2, S. 315-328.
- Truscott, W. G. (Capacity-Constrained Transportation Activities, 1986): Production Scheduling with Capacity-Constrained Transportation Activities, in: *Journal of Operations Management*, Vol. 6 (1986), Nr. 3, S. 333-348.